基于二阶统计量的盲反卷积
SOS based Blind Deconvolution

- 前言
- 最小平方反卷积
- 预测反卷积

应用

- 地震数据提高分辨率
- 地震数据中的多次波压制
- 语音识别，合成，增强
- 语音回声抵消
- 生物信号处理
- 通信信号处理

基本假设

- 二阶统计量被用来估计信道的振幅谱
  信道的自相关进行傅立叶变换，可以得到信道的功率谱
- 对输入信号作某些假设，本课中，假设为白噪声。
- 对相位进行某种假设，本课中，假设为最小相位。

不同角度的方法推导

- 自适应滤波器
- ARMA模型

平稳ARMA过程

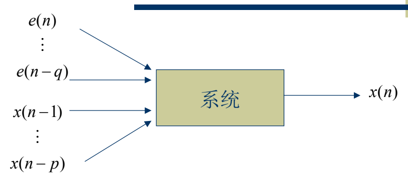
ARMA: Autoregressive Moving Average Process:自回归滑动平均过程

一种重要的平稳随机过程，可以用常系数差分方程来定义：

$$x(n)+\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)=\sum_{j=0}^{q} b_j e(n-j)$$

式中：$e(n)$ 是一个零均值白噪声，方差为 σ^2

ARMA(p,q)



$$A(z)X(z) = B(z)E(z)$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p}$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q}$$

将 $E(z)$ 看成输入，$X(z)$ 看成输出，则信道（系统）为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

信道功率谱估计

- 输出信号的相关函数或功率谱：

$$R_{ss}(z) = H(z)H(z^{-1})R_{ee}(z)$$

$$R_{ee}(n) = \sigma^2 \delta(n)$$

$$R_{ee}(z) = \sigma^2$$

$$R_{ss}(z) = R_{hh}(z)$$

滑动平均过程（MA）和自回归过程（AR）

MA：

$$A(z) = 1,\quad x(n) = \sum_{j=0}^{q} b_j e(n-j)$$

AR：

$$B(z) = 1,\quad x(n) + \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i) = e(n)$$

最小相位，最大相位和混合相位

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p}$$

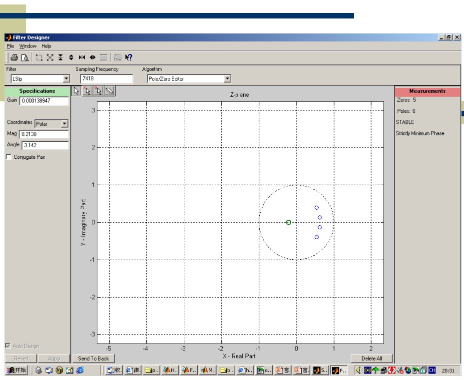
$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q}$$

一个信道为最小相位，则其零极点都在单位园内

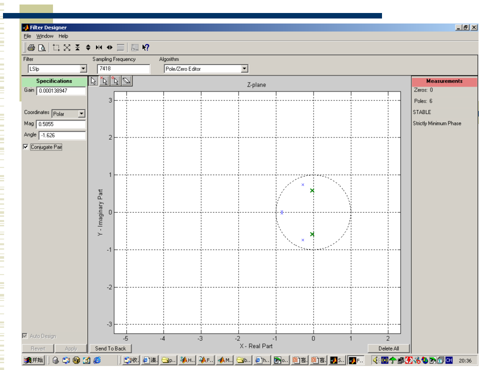
一个信道为最大相位，则其零极点都在单位园外

一个信道为混合相位，则其零极点在单位园内外

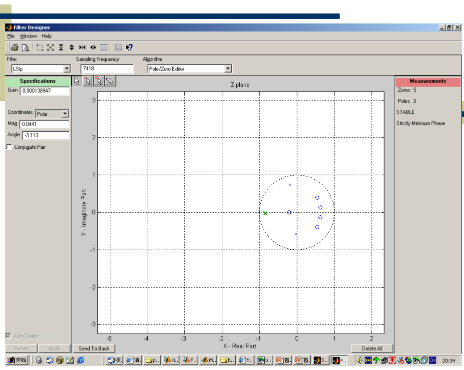
功率谱等价，即功率谱相同的信道，可以是最小相位，最大相位或者混合相位



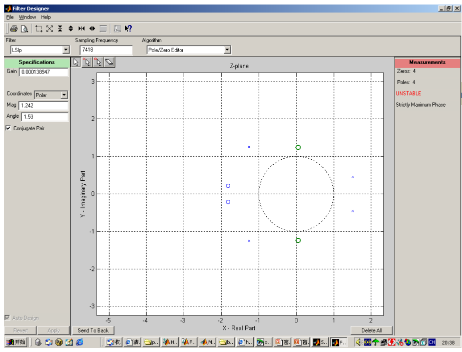
最小相位系统（MA）



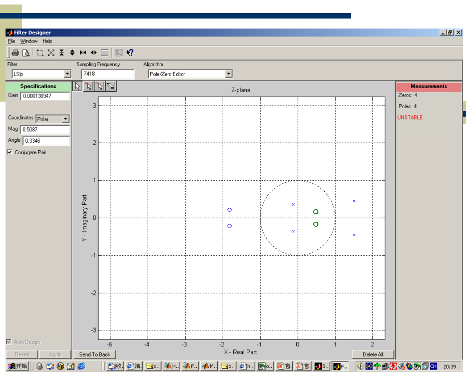
最小相位系统（AR）



最小相位系统（ARMA）



最大相位系统（ARMA）



混合相位系统（ARMA）

最小相位特点

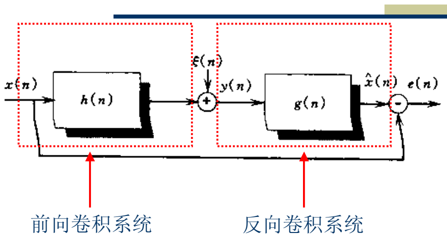
1、 考虑最小相位系统 $H_m(z)=H_m(e^{j\omega})=\left|H_m(e^{j\omega})\right|e^{j\phi_m(\omega)}$，对任意系统 $H(z)=H(e^{j\omega})=\left|H_m(e^{j\omega})\right|e^{j\phi(\omega)}$，存在

$$-\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}\geq-\frac{d\phi_m(\omega)}{d\omega}$$

2、 在 1 的条件下，如果 $y_m(n), y(n)$ 分别是最小相位系统和其他任意系统在输入一样的情况下的输出，则：

$$\sum_{n=0}^{K}y_m{}^2(n)\geq\sum_{n=0}^{K}y^2(n)$$

系统示意图



基于二阶统计量的盲反卷积

- 假设信道已知，求反卷积滤波算子
- 假设期望信号已知的情况下，求反卷积滤波算子
- 最小平方反卷积
- 预测反卷积

反滤波算子

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

设信道已知为 $h(t)$，反卷积可以利用如下反滤波算子实现：

$$g(t)*h(t)=\delta(t),\quad \delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & else\end{cases}$$

则

$$\hat{x}(t)=y(t)*g(t)$$

反滤波算子

反向卷积系统中输入信号为 $y(t)$，期望输出是 $d(t)$，可以看出：

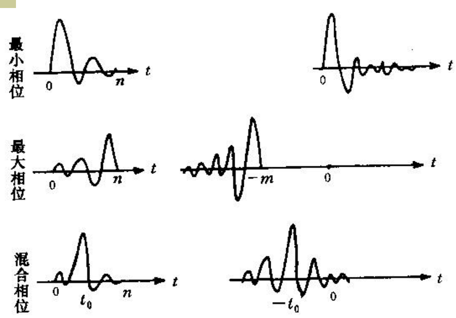
$h(t)$ 可以看成输入信号的一种，$\delta(t)$ 是期望输出中的一种

$$g(t)*y(t)=d(t)$$

为了求取反滤波算子，采用如下能量函数：

$$\min_g E, E=\sum_t e^2(t)$$

$$e(t)=\delta(t)-g(t)*h(t)$$



信道和反滤波算子

反卷积问题描述

反向卷积系统中，考虑如下离散信号：

输入信号：$\mathbf{y}=(y(0),y(1),\cdots y(n))$

反滤波算子：$\mathbf{g}=(g(0),g(1),\cdots g(m))$

实际输出信号：$\hat{\mathbf{x}}=(\hat{x}(0),\hat{x}(1),\cdots \hat{x}(M))$，$M=n+m$

期望输出信号：$\mathbf{d}=(d(0),d(1),\cdots d(M))$

误差能量函数：

$$E=\sum_i e^2(i)=\sum_i (d(i)-\hat{x}(i))^2=\sum_i\left\{d(i)-\sum_j[y(i-j)g(j)]\right\}^2$$

反滤波算子求取

使误差能量函数最小，即：$\dfrac{\partial E}{\partial g(j)}=0$

$$2\sum_i\left(\sum_{k=0}^m g(k)y(i-k)-d(i)\right)y(i-j)=0$$

$$\sum_{k=0}^m g(k)\sum_i y(i-j)y(i-k)=\sum_i y(i-j)d(i)$$

$$\phi_{yy}g=\varphi_{dy}$$

式中：ϕ_{yy} 是 y 的自相关矩阵，φ_{dy} 是 d 和 y 的互相关矩阵

反滤波算子求取

$$\begin{bmatrix}\phi_{yy}(0) & \phi_{yy}(1) & \cdots & \phi_{yy}(m)\\ \phi_{yy}(1) & \phi_{yy}(0) & \cdots & \phi_{yy}(m-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \phi_{yy}(m) & \phi_{yy}(m-1) & \cdots & \phi_{yy}(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g(0)\\ g(1)\\ \vdots\\ g(m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_{dy}(0)\\ \varphi_{dy}(1)\\ \vdots\\ \varphi_{dy}(m)\end{bmatrix}$$

反滤波算子求取

从信道估计角度来看，反滤波算子问题可用如下卷积模型：

$d = y * g$，写成矩阵形式：$Yg = d$

$$\begin{bmatrix} y(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & y(0) & \cdots & \vdots \\ y(n) & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & y(n) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & y(0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(2) \\ \vdots \\ g(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(0) \\ \vdots \\ d(n) \\ d(n+1) \\ d(n+2) \\ \vdots \\ d(M) \end{bmatrix}$$

最小二乘解：

$$g = (Y^T Y)^{-1} Y^T d$$

反滤波算子求取

上述两种解是一致的，因为：

$$\phi_{yy} = Y^T Y$$

$$\varphi_{dy} = Y^T d$$

最小平方反卷积（脉冲反卷积）

问题描述

反向卷积系统中，系统（信道）函数为输入信号：$\boldsymbol{h} = (h(0), h(1), \cdots h(n))$

反滤波算子：$\boldsymbol{g} = (g(0), g(1), \cdots g(m))$

实际输出信号：$\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}(0), \hat{x}(1), \cdots \hat{x}(M))$，$M = n + m$

期望输出信号：$\boldsymbol{d} = (1, 0, \cdots 0) = \delta(t)$

求解：$\phi_{hh} g = \varphi_{dh}$

假设：

1、 前向卷积系统函数 h 为最小相位。此假设使得反滤波算子为物理可实现的的，

即当 $i < 0$ 时，$g(i) = 0$。从而不要估计 φ_{dh}。

2、 前向卷积系统的输入信号 x 为白噪序列，即

$$\begin{cases} E\{x\} = 0 \\ E\{x(i)x(j)\} = \sigma^2 \delta(i-j) \end{cases}$$

令前向卷积系统的输出信号是 y，假设 2 使得：$\phi_{hh} = \phi_{yy}$

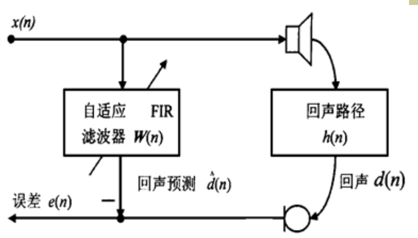
脉冲反卷积

$$\begin{bmatrix} \phi_{yy}(0) & \phi_{yy}(1) & \cdots & \phi_{yy}(m) \\ \phi_{yy}(1) & \phi_{yy}(0) & \cdots & \phi_{yy}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{yy}(m) & \phi_{yy}(m-1) & \cdots & \phi_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{yy}(0) & \phi_{yy}(1) & \cdots & \phi_{yy}(m) \\ \phi_{yy}(1) & \phi_{yy}(0) & \cdots & \phi_{yy}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{yy}(m) & \phi_{yy}(m-1) & \cdots & \phi_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0)/h(0) \\ g(1)/h(0) \\ \vdots \\ g(m)/h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(t) = y(t) * g(t)$$

预测反卷积



通信系统的回声抵消

目的：

目的：

1、 对信道函数进行截断，期望信道函数为

$$h=\left[h(0),\cdots,h(q-1),0,\cdots 0\right]$$

q 被称为预测步长

2、 通过信道函数截断，消除回声，多次波和提高分辨率等

问题描述

反向卷积系统中，系统（信道）函数为输入信号：$\boldsymbol{h}=(h(0),h(1),\cdots h(n))$

反滤波算子：$\boldsymbol{g}=(g(0),g(1),\cdots g(m))$

实际输出信号：$\hat{\boldsymbol{x}}=(\hat{x}(0),\hat{x}(1),\cdots \hat{x}(M))$， $M=n+m$

期望输出信号：$\boldsymbol{d}=(h(q),h(q+1),\cdots h(n))$

求解：$\phi_{hh}g=\varphi_{dh}$

$$\varphi_{dh}=H^T d$$

$$\varphi_{dh}=\left[\phi_{hh}(q),\phi_{hh}(q+1),\cdots\phi_{hh}(m+q)\right]^T$$

$$\varphi_{dh}=\left[\phi_{yy}(q),\phi_{yy}(q+1),\cdots\phi_{yy}(m+q)\right]^T$$

预测反卷积因子

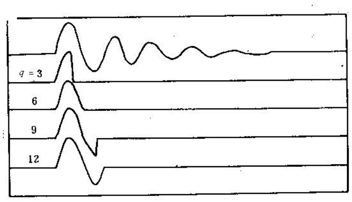
前面得到的算子 g 和输出信号卷积可以得到当前信号在 q 步后对应信号（如回声）的一个估计，预测反卷积目的是将预测得到的信号从输出信号中消除掉。所以预测反卷积因子为：

$$b=\delta(t)-gZ^p$$

$$\left[b(0),\cdots b(m+q)\right]=\left[1,0\cdots,0,-g(0),\cdots,-g(m)\right]$$

$(q-1)$

$$\hat{x}=y*b$$



AR模型

$$y(n+q)=-\sum_{i=0}^{m}g(i)y(n-i+1)$$

$$\begin{bmatrix}\phi_{yy}(0) & \phi_{yy}(1) & \cdots & \phi_{yy}(m)\\ \phi_{yy}(1) & \phi_{yy}(0) & \cdots & \phi_{yy}(m-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \phi_{yy}(m) & \phi_{yy}(m-1) & \cdots & \phi_{yy}(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g(0)\\ g(1)\\ \vdots\\ g(m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_{yy}(q)\\ \phi_{yy}(q+1)\\ \vdots\\ \phi_{yy}(q+m)\end{bmatrix}$$

预测反卷积和脉冲反卷积

脉冲反卷积是预测反卷积的一种特例，即

$q=1$

又被称为一步预测反卷积

同样，预测反卷积使用了和脉冲反卷积一样的两个假设

语音处理中的LPC技术和一步预测反卷积原理是一样的

算法：

1、 确定预测步长 q 和预测因子长度 m。

2、 计算输出信号的自相关 $\phi_{yy}(l); l=0,m+q$

3、 解 Toeplitz 方程得到最优解 $g(0),\cdots g(m)$

4、 形成预测反卷积因子：

$$[b(0),\cdots b(m+q)] = [1,0\cdots,0,-g(0),\cdots,-g(m)]$$

$$(q-1)$$

5、 得到反卷积结果：$\hat{x} = y*b$

一些具体问题

- 预测步长和算子长度的确定
- 自相关估计
- Toeplitz方程递推求解
- 方程组病态问题
- 预测反卷积的计算量问题

预测步长和算子长度的确定

预测步长的确定是和具体的应用有关的，如：

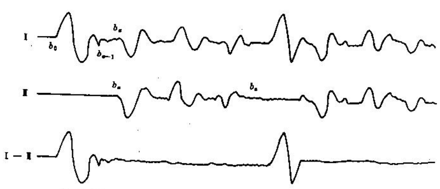
1、 在语音回声抵消和地震多次波压制中，预测步长为回声和多次波的时延，一般需要利用时延估计技术得到。

2、 信号分辨率时，对预测步长进行试验

算子长度（滤波器定阶）确定方法，如：

1、 先验知识

2、 SVD 分解



自相关估计

$$\phi_{yy}(i) = E\{y(n)y(n+i)\}$$

自相关最大似然估计为：

$$\phi_{yy}(i) = \frac{1}{N-|i|}\sum_{n=0}^{N-|i|-1} y(n)y(n+i)$$

为了利用 FFT，通常用：

$$\phi_{yy}(i) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|i|-1} y(n)y(n+i)$$

FFT计算自相关

1、 边缘加窗处理

2、 数据补零加长处理，以避开混叠。即 $L \geq N + m$

3、 $Y(k) = fft(y(n))$，$v(n) = ifft(|Y(k)|^2)$，则

$$\phi_{yy}(i) = \frac{1}{N} v(i)$$

Toeplitz 矩阵

Toeplitz 矩阵是信号处理中应用最广泛的特殊矩阵之一

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_2 & \cdots & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-n+1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

斜对称矩阵,在预测反卷积中，$Ax = b$

 A 是一个对称的 Toeplitz 矩阵，即 $a_i = a_{-i}$

Toeplitz方程递推求解

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

假设已知 m 阶方程解，求解 $m+1$ 阶方程

分块形式

$$\begin{bmatrix} A_m & \bar{a}_m \\ \bar{a}_m^T & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_m^{m+1} \\ x_m^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\bar{a}_m = [a_m \quad a_{m-1} \quad \cdots \quad a_1]^T$，$\bar{b}_m = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{m-1}]^T$

$\bar{x}_m^{m+1} = [x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{m-1}]^T$

$$A_m \bar{x}_m^{m+1} + \bar{a}_m x_m^{m+1} = \bar{b}_m$$

$$\bar{a}_m^T \bar{x}_m^{m+1} + a_0 x_m^{m+1} = b_m$$

解方程组得到：$\bar{x}_m^{m+1} = \bar{x}_m^m - \bar{z}_m^m x_m^{m+1}$，

$$x_m^{m+1} = \frac{b_m - \bar{a}_m^T \bar{x}_m^m}{a_0 - \bar{a}_m^T \bar{z}_m^m}$$，方程解为：$\bar{x}_{m+1}^{m+1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_m^{m+1} & x_m^{m+1} \end{bmatrix}^T$

$A_m \bar{x}_m^m = \bar{b}_m$，$A_m \bar{z}_m^m = \bar{a}_m$

显然，为了得到 $\bar{x}_{m+1}^{m+2}$，我们需要估计 $\bar{z}_{m+1}^{m+1}$，和上述方法一样，得到如下递推公式：

$$\bar{z}_m^{m+1} = \bar{z}_m^m - \bar{z}_m^m z_m^{m+1}$$

$$z_m^{m+1} = \frac{a_m - \bar{a}_m^T \bar{z}_m^m}{a_0 - \bar{a}_m^T \bar{z}_m^m}$$，方程解为：$\bar{z}_{m+1}^{m+1} = \begin{bmatrix} \bar{z}_m^{m+1} & z_m^{m+1} \end{bmatrix}^T$

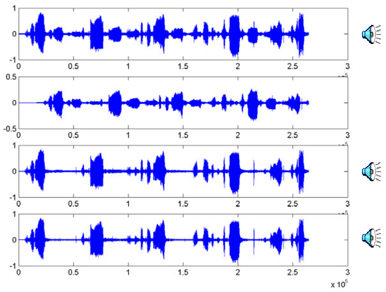
初始值

$$z_1^{-1} = \frac{a_1}{a_0},\quad x_1^{-1} = \frac{b_0}{a_0}$$

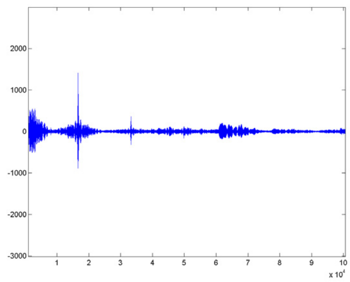
加白噪处理

$$\begin{bmatrix} \phi_{yy}(0)+c & \phi_{yy}(1) & \cdots & \phi_{yy}(m) \\ \phi_{yy}(1) & \phi_{yy}(0)+c & \cdots & \phi_{yy}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{yy}(m) & \phi_{yy}(m-1) & \cdots & \phi_{yy}(0)+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yy}(q) \\ \phi_{yy}(q+1) \\ \vdots \\ \phi_{yy}(q+m) \end{bmatrix}$$

实例1：语音回声抵消



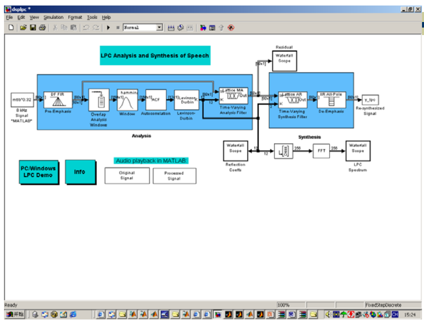
时延估计



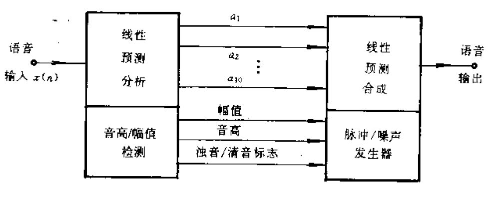
注意事项

- 先预测出回声
- 进行时移
- 相减

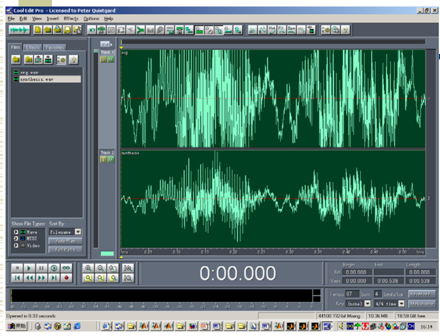
实例2：LPC语音合成



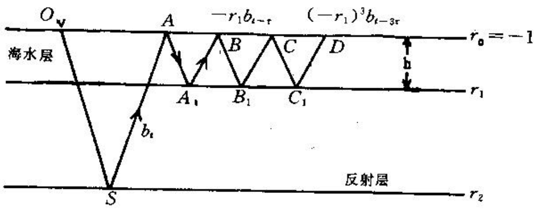
LPC语音编码合成原理

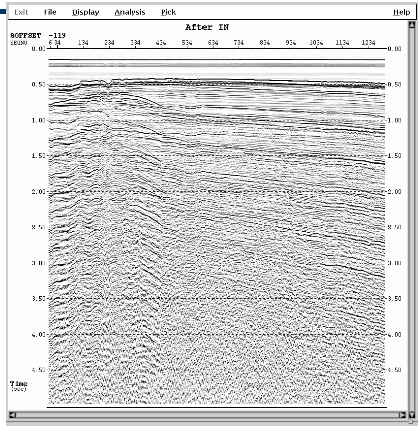


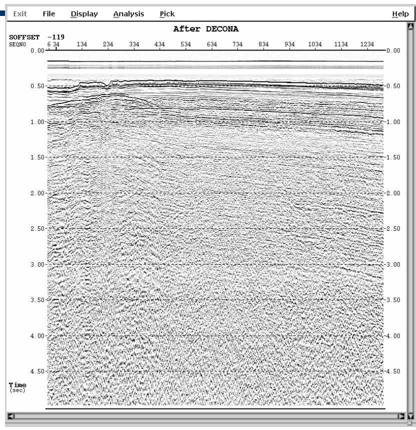
低比特率语音参数编码的线性预测

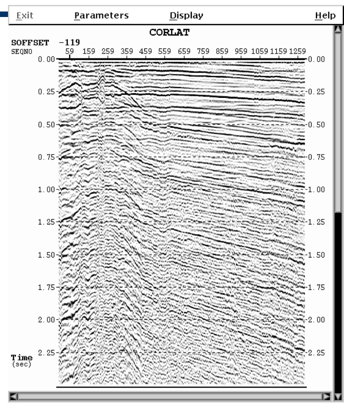


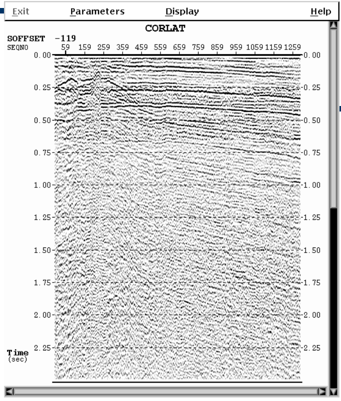
实例（地震多次波压制）











进一步阅读文献：

- 邹谋炎,反卷积和信号复原 ，第4章
- 杨行峻，迟惠生等，语音信号数字处理，第4章，第8章
- 黄绪德，反褶积与地震道反演，第2章，第3章