广东工业大学试卷参考答案及评分标准（　　）

课程名称： 信号处理理论及技术。

考试时间:2023 年 5 月 8 日 （第 12 周 星期五 ）

一、简答题

1、（10 分）

（1）线性的含义不同：基本最小二乘估计的线性是指用于线性系统；线性均方估计的线性是指估计参量与观测样本之间具有线性关系。

（2）误差的定义不同：基本最小二乘估计的误差定义为线性方程左右两端的差值，即 $e = Ax - b$；线性均方估计的误差定义为估计参数与真实参数之间的差值。

（3）最优化目标不 同：基本最小二乘估计的最优化目标定义为误差平方和，即 $(Ax-b)^H(Ax-b)$；线性均方估计的最优化目标定义为均方误差，即 $E\{e^2\} = E\left\{\left(\sum_{n=1}^{N} w_n x_n - \theta\right)^2\right\}$。

（4）解的形式不同：基本最小二乘估计的解为 $\hat{x}_{LS} = \left(A^H A\right)^{-1} A^H b$；线性均方估计的解为 $w = R^{-1} g$。

2、（10 分）

（1）经典谱估计是非参数化估计；现代谱估计是参数化估计。

（2）经典谱估计，存在方差性能与分辨率之间的内在矛盾；现代谱估计，在改进功率谱估计方差性能的同时，能保持高的分辨率。

3、（10 分）

Gabor 变换和短时傅里叶变换的相同点：都是加窗傅里叶变换。

Gabor 变换和短时傅里叶变换的区别：

（1）STFT(t,f)是信号的时频二维表示，而 Gabor 变换系数 amn 则是信号的时间移位-频率调制二维表示 。

（2）连续 STFT(t,f)的时频谱是连续的，连续 Gabor 变换的时频谱是离散的。Gabor 展开只需要离散的时频谱。

（3）STFT 的窗函数 g(t)必须是窄窗，而 Gabor 变换的窗函数 r(t)却无此限制。因此，可以将 Gabor 变换看作是一种加窗 Fourier 变换，其适用范围比 STFT 的适用范围更广。

二、计算、分析与证明题

1、（10 分）

$$E\{X(t)\}=E\{A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\}=E\{A\}\cos(\omega t)+E\{B\}\sin(\omega t)=0$$

$$\begin{aligned}
C_{xx}(\tau)=R_{xx}(\tau)&=E\{X(t)X^*(t+\tau)\}\\
&=E\{(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))(A\cos(\omega(t+\tau))+B\sin(\omega(t+\tau)))^*\}\\
&=E\{A^2\cos(\omega t)\cos(\omega(t+\tau))+B^2\sin(\omega t)\sin(\omega(t+\tau))+AB^*\cos(\omega t)\sin(\omega(t+\tau))+A^*B\cos(\omega(t+\tau))\sin(\omega t)\}\\
&=\sigma^2\{\cos(\omega t)\cos(\omega(t+\tau))+\sin(\omega t)\sin(\omega(t+\tau))\}\\
&=\sigma^2\cos\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{xx}(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}C_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2\cos\omega_0\tau\bullet e^{-j\omega\tau}d\tau\\
&=\sigma^2\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]
\end{aligned}$$

很显然，频率谱是线谱，不是常数，因此 $X(t)$ 是有色噪声。

2、（10 分）

$$f(z_1,\cdots,z_N|s)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z_i-s/2)^2/2}=(2\pi)^{-N/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(z_i-\frac{s}{2}\right)^2\right)$$

$$L=\ln f(z_1,\cdots,z_N|s)=-\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(z_i-\frac{s}{2}\right)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial s}=-\sum_{i=1}^{N}\left(z_i-\frac{s}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\hat{s}_{ML}=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i$$

3、（10 分）

$$\begin{aligned}
f(x/A)&=\prod_{n=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x[n]-A\cos(2\pi fn+\phi))^2\right]\\
&=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N+1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N}(x[n]-A\cos(2\pi fn+\phi))^2\right]
\end{aligned}$$

$$\ln f(x/A)=-\ln\left[(2\pi\sigma^2)^{\frac{N+1}{2}}\right]-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N}(x[n]-A\cos(2\pi fn+\phi))^2$$

$$\frac{\partial\ln f(x/A)}{\partial\phi}=-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N}\{(x[n]-A\cos(2\pi fn+\phi))\times[A\sin(2\pi fn+\phi)]\}$$

$\dfrac{\partial\ln f(x/A)}{\partial\phi}$ 不能写成 $K(\phi)(\hat{\phi}-\phi)$ 的形式，因此不存在 CRLM。

4、（10 分）

$$Th=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{N}}erfc^{-1}(2\alpha)=\frac{2}{\sqrt{N}}erfc^{-1}(2\alpha)$$

令$erfc^{-1}(2\alpha)=x$，则：$erf(x)=1-erfc(x)=1-2\alpha=0.9$

查误差函数表得：$x=1.16$

$$Th=\frac{2}{\sqrt{N}}erfc^{-1}(2\alpha)=\frac{2}{\sqrt{20}}\times 1.16=0.5188$$

$$P_D=\frac{1}{2}\mathrm{e}rfc\left(\frac{Th-S}{\sqrt{2/N}}\right)=0.5erfc(-3.312)\approx 1$$

5、（10 分）

（1）前向横向自适应滤波器起着线性均衡的作用，反馈横向自适应滤波器起着非线性均衡的作用。

（2）前向横向自适应滤波器的滤波算法：$\begin{cases} e_f(k)=\hat{a}(k)-z(k) \\ f(k+1)=f(k)+2\mu e_f(k)y^*(k) \end{cases}$

反馈横向自适应滤波器的滤波算法：$\begin{cases} e_b(k)=\hat{a}(k)-\tilde{a}(k) \\ b(k+1)=b(k)+2\mu e_b(k)\tilde{a}^*(k) \end{cases}$

6、（10 分）

（1）u(n)的自相关函数为：

$$r(m)=E[u(n)u(n-m)]$$
$$=E\left\{\left[\sum_{k=1}^{M}A_k\cos(\omega_k n+\phi_k)+v(n)\right]\bullet\left[\sum_{k=1}^{M}A_k\cos(\omega_k(n-m)+\phi_k)+v(n-m)\right]\right\}$$

因$v(n)$是零均值、方差为σ^2的白噪声，且与所有ϕ_k独立，因此：

$$r(m)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}A_lA_kE\{\cos(\omega_l(n-m)+\phi_l)\cos(\omega_k n+\phi_k)\}+\sigma^2\delta(m)$$

ϕ_k是相互独立并在上服从均分布的随机相位，因此：

$$E\{\cos(\omega_l(n-m)+\phi_l)\cos(\omega_k n+\phi_k)\}=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos(\omega_k m) & k=l \\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

$$r(m)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}A_k^2\cos(\omega_k m)+\sigma^2\delta(m)$$

（2）u(n)的功率谱为：

$$S(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}r(m)e^{-jm\omega}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{M}A_k^2[\delta(\omega+\omega_k)+\delta(\omega-\omega_k)]+\sigma^2$$

7、（10 分）

$P(n,n-1)=F(n,n-1)P(n-1)F^{H}(n,n-1)+Q_1(n-1)$

当状态估计误差自相关矩阵的初始值$P(0)$增大β倍，上述公式中$P(n-1)$增大β倍，同时$Q_1(n-1)$增大β倍，因此$P(n,n-1)$增大β倍，记为$P_1(n,n-1)$，即

$$P_1(n,n-1)=\beta\bullet P(n,n-1)$$

由于

$$A(n)=C(n)P(n,n-1)C^{H}(n)+Q(n)$$

因此，当$P(0)$、$Q_1(n-1)$和$Q(n)$同时增大β倍，$A(n)$增大β倍，记为$A_1(n)$，即

$$A_1(n)=\beta\bullet A(n)$$

$K_1(n)=P_1(n,n-1)C^{H}(n)A_1^{-1}(n)=\beta\bullet P(n,n-1)C^{H}(n)\bullet\beta^{-1}\bullet A^{-1}(n)=K(n)$

因此，卡尔曼增益矩阵保持不变