

信号与噪声的数学建模

一、信号建模

1、信号模型的分类

表9.1 信号模型的分类

模型类型	参数	例子	信号描述
确定性	已知	$10 \cos[2\pi(0.1)n + \pi/4]$	完全已知
确定性	未知	$10 \cos[2\pi(0.1)n + \phi]$	$-\pi \leq \phi \leq \pi$
随机	已知	$10 \cos[2\pi(0.1)n + \Phi]$	Φ 的PDF已知, $\Phi \sim U(-\pi, \pi)$
随机	未知	$10 \cos[2\pi(0.1)n + \Phi]$	Φ 的PDF未知

2、参数已知的确定性信号

(1) 正弦信号

$$s[n] = A \cos(2\pi f_i n + \phi) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(2) 阻尼指数信号

$$s[n] = A r^n \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(3) 阻尼正弦信号

$$s[n] = \sum_{i=1}^p A_i r_i^n \cos(2\pi f_i n + \phi_i) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(4) 相位调制信号

$$s[n] = A \cos(\beta[n] + \phi) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$s[n] = A \cos \left[2\pi \left(f_0 n + \frac{1}{2} m n^2 \right) + \phi \right] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(5) 多项式信号

$$s[n] = A \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$s[n] = A + Bn \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$s[n] = \sum_{i=1}^{p-1} c_i n^i \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(6) 周期信号 $s[n] = g[n] = g[n + kM]$

3、参数未知的确定性信号

在含有未知参数的信号建模中，必须能够根据现场数据估计这些未知参数。然后将估计的参数回插到理论上的表达式中，得到估计信号。通过将现场数据信号与建模的信号进行比较，就能够确定模型与实际信号匹配程度。

多项式模型和周期信号模型都只含香型参数，比较容易处理。

(1) 多项式信号模型

$$J(A, B) = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - (A + Bn))^2$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T x \quad \text{最小二乘估计}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & N-1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

一般形式:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{p-1} \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T x$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0^2 & \cdots & 0^{p-1} \\ 1 & 1 & 1^2 & \cdots & 1^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & N-1 & (N-1)^2 & \cdots & (N-1)^{p-1} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$x = H\theta + w$$

(2) 周期信号模型

$$s = \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ g[2] \\ g[0] \\ g[1] \\ g[2] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ g[2] \end{bmatrix}}_{\theta}$$

$$\hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T x$$

$$\hat{s} = H \hat{\theta} = H (H^T H)^{-1} H^T x$$

(3) 非线性和部分线性信号

剩下的信号类型，如正弦、阻尼指数、阻尼正弦、和相位调制，如果只有幅度和相位未知，则它们也是线性的。否则，信号模型只能是部分现行的。

表9.2 部分线性信号模型

信号模型	数学表达式	参数	线性参数
正弦	$\sum_{i=1}^p A_i \cos(2\pi f_i n + \phi_i)$	A_i, f_i, ϕ_i	A_i, ϕ_i
阻尼指数	$\sum_{i=1}^p A_i r_i^n$	A_i, r_i	A_i
阻尼正弦	$\sum_{i=1}^p A_i r_i^n \cos(2\pi f_i n + \phi_i)$	A_i, r_i, f_i, ϕ_i	A_i, ϕ_i
相位调制	$\sum_{i=1}^p A_i \cos\left[2\pi\left(f_i n + \frac{1}{2} m_i n^2\right) + \phi_i\right]$	A_i, f_i, m_i, ϕ_i	A_i, ϕ_i
多项式	$\sum_{i=0}^{p-1} c_i n^i$	c_i	c_i
周期	$g[0], \dots, g[M-1]g[0], \dots, g[M-1], \dots$	$g[i]$	$g[i]$

p个谐波代价函数:

$$J(\alpha_1, \alpha_2, f_i; i=1, 2, \dots, p) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x[n] - \sum_{i=1}^p [\alpha_1 \cos(2\pi f_i n) + \alpha_2 \sin(2\pi f_i n)] \right)^2$$

这是一个较难求解的问题，当p远大于3时几乎是不可能的事。考虑p=1时的情况。

$$s[n] = \alpha_1 \cos(2\pi f_1 n) + \alpha_2 \sin(2\pi f_1 n)$$

$$s = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(2\pi f_1) & \sin(2\pi f_1) \\ \vdots & \vdots \\ \cos[2\pi f_1(N-1)] & \sin[2\pi f_1(N-1)] \end{bmatrix}}_{H(f_1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

可以证明，最小化问题可以通过数值最大化得到。

$$J(f_1) = x^T H(f_1) \left(H(f_1)^T H(f_1) \right)^{-1} H^T(f_1) x$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \left(H(\hat{f}_1)^T H(\hat{f}_1) \right)^{-1} H^T(\hat{f}_1) x$$

$$\hat{A} = \sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}$$

$$\hat{\phi} = \arctan \left(-\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \right)$$

4、具有已知PDF的随机信号

(1) 一般考虑

有些信号的参数最好是看成随机变量的实验结果。最简单也最有用的例子是正弦信号，它是由几何上复杂目标反射形成的。这样的目标显示有多个反射点，每一个反射点产生一个幅度衰减、时延有轻微变化的回波。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^p A_i \cos[2\pi F_0(t - \tau_i) + \phi_i] &= \sum_{i=1}^p A_i \cos(-2\pi F_0 \tau_i + \phi_i) \cos(2\pi F_0 t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p A_i \sin(-2\pi F_0 \tau_i + \phi_i) \sin(2\pi F_0 t) \\ &= \alpha_1 \cos(2\pi F_0 t) + \alpha_2 \sin(2\pi F_0 t)\end{aligned}$$

瑞利衰落信道：正弦幅度为瑞利分布，相位为均匀分布。

(2) 随机正弦模型（零均值）

$$s[n] = \alpha_1 \cos(2\pi f_0 n) + \alpha_2 \sin(2\pi f_0 n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T \sim N(0, \sigma_\alpha^2 I)$$

(3) 随机正弦模型（非零均值）

$$s[n] = \alpha_1 \cos(2\pi f_0 n) + \alpha_2 \sin(2\pi f_0 n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T \sim N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2 I)$$

当目标或接收回波的信道并非有相近的幅度而是有一个回波占主导地位时会遇到这种情况，对应于通信中的莱斯衰落信号。

(4) 贝叶斯线性模型

随机信号更一般的线性模型是允许任意的基信号 $\{h_1[n], h_2[n], \dots, h_p[n]\}$ 和随机幅度 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p\}$, 可表示为:

$$s[n] = \sum_{i=1}^p \theta_i h_i[n] = H\theta$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1[0] & h_2[0] & \cdots & h_p[0] \\ h_1[1] & h_2[1] & \cdots & h_p[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_1[N-1] & h_2[N-1] & \cdots & h_p[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\theta \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta^2 I)$$

$$x = s + w = H\theta + w \quad (\text{贝叶斯线性模型})$$

$$x \sim N(H\mu_\theta, HC_\theta H^T + \sigma^2 I) \quad (\theta \sim N(\mu_\theta, C_\theta))$$

一种特殊情况：幅度不再是随机的，而是已知的确定性的。

$$x = H\mu_{\theta} + w$$

5、PDF具有未知参数的随机信号

对于这类信号的建模，尽管在实际中偶尔采用，但算法设计相当困难。

二、噪声建模

1、噪声模型分类

表9.3 噪声模型分类

模型类型	PDF	PSD	平稳性
高斯白噪声	高斯	平坦	平稳
高斯色噪声	高斯	非平坦	平稳
一般高斯噪声	高斯	没有定义	非平稳
IID非高斯噪声	非高斯	平坦	平稳
随机相位正弦噪声	非高斯	冲激	平稳

2、高斯白噪声

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right)$$

性质：（1）每个噪声样本有相同的PDF；

（2）每个噪声样本都独立于其他噪声样本。意味着不能依据观测到的样本去预测任何其他样本。

（3）IID，所以PSD是平坦的。

3、高斯色噪声

雷达中的杂波和声呐中的回声，都在感兴趣的波段有非平坦的PSD。

$$P_w(f) = \frac{\sigma_u^2}{|1 + a[1]\exp(-j2\pi f) + \cdots + a[p]\exp(-j2\pi fp)|^2}$$

AR建模的一般过程:

- (1) 选取要建模的PSD。如果已知，则PSD用数学形式来表示；否则，用频率上的一些样本来表示。
- (2) 选择 $p > 2M$ ，其中 M 是PSD的波峰数。
- (3) 如果PSD的数学形式已知，可以求傅里叶逆变换，进入第4步。否则，利用数值计算方法计算PSD的逆变换，产生离散自相关样本（ACS）。
- (4) 利用ACS值，解Yule-walker方程，得到AR参数。
- (5) 计算AR(p)建模的PSD。
- (6) 将模型PSD与实际PSD进行比较，如果不满足，增加 p ，回到第3步。

4、一般高斯噪声

(1) 随机过程的特性突然变化（分段平稳）。

(2) 逐步变化（局部平稳）。

除分段建模和局部建模外，可使用自适应模型。

5、IID非高斯噪声

大的噪声尖峰是非高斯PDF的特征，常用来对某些物理噪声建模，如人工噪声、声瞬态、地磁噪声等。

(1) 拉普拉斯分布：

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}|w|\right)$$

IID非高斯噪声实验结果的产生通常是用（0,1）上均匀分布的随机变量u的非线性变换来实现的。

(2) 混合高斯分布:

$$p(w) = (1 - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma_1^2}\right) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

6、随机相位正弦噪声

对于由干扰引起的噪声，如电源的60Hz干扰、机器噪声或窄带干扰，通常的模型是正弦之和。

$$w[n] = \sum_{i=1}^p A_i \cos(2\pi f_i n + \phi_i)$$

两种典型模型：

(1) 随机相位正弦模型（相位均匀分布）

$$P_w(f) = \sum_{i=1}^p \frac{A_i^2}{4} \delta(|f| - f_i) \quad -1/2 \leq f \leq 1/2$$

PDF难以确定的。

(2) 幅度是瑞利分布（PDF是高斯的）

$$P_w(f) = \sum_{i=1}^p \frac{P_i}{2} \delta(|f| - f_i) \quad -1/2 \leq f \leq 1/2$$

$$P_i = E[A_i^2]/2$$

三、信号模型选择

1、信号模型的选择步骤

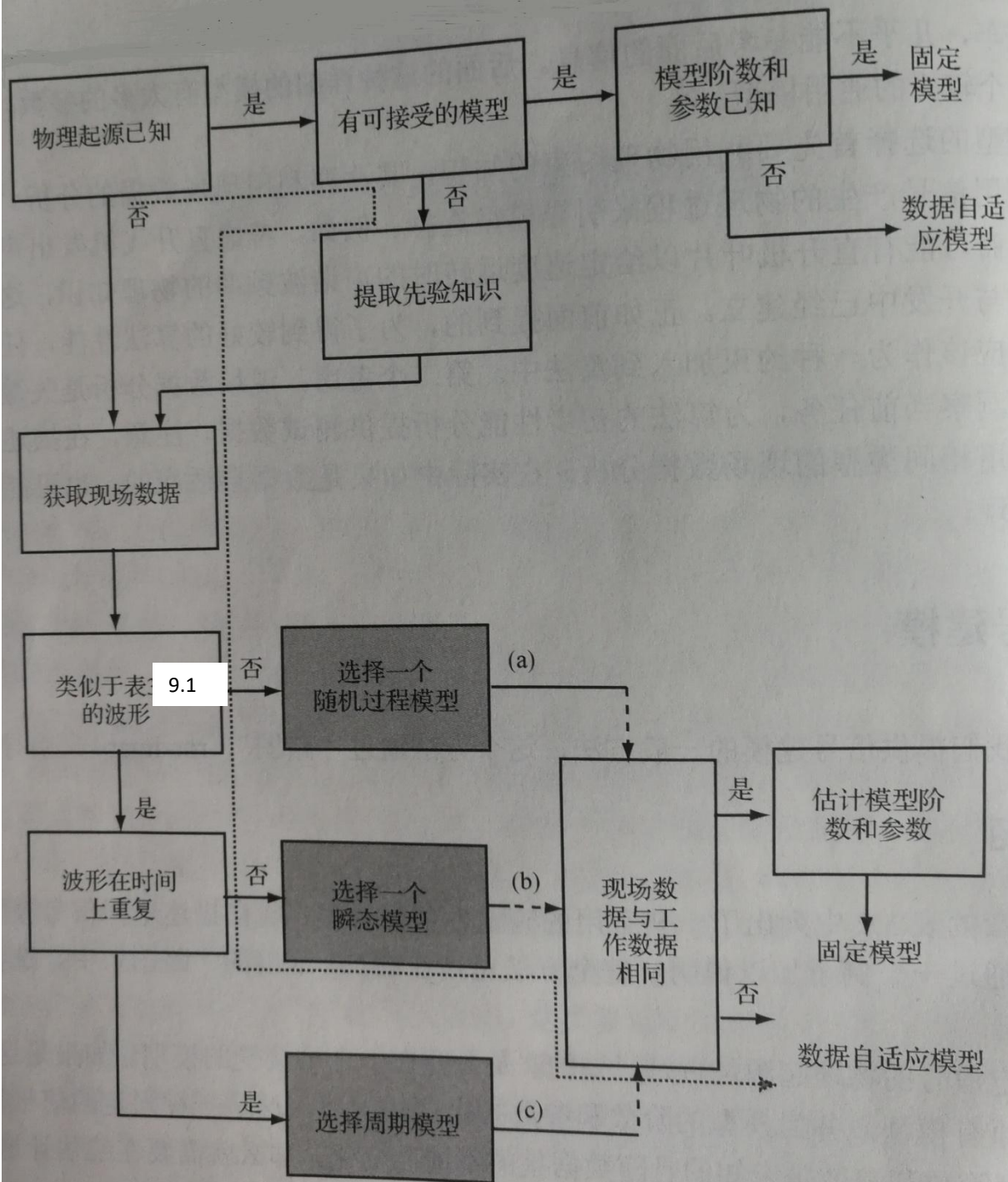
(1) 选择一般信号模型类型，如：

$$\sum_{i=1}^p A_i \cos(2\pi f_i n + \phi_i)$$

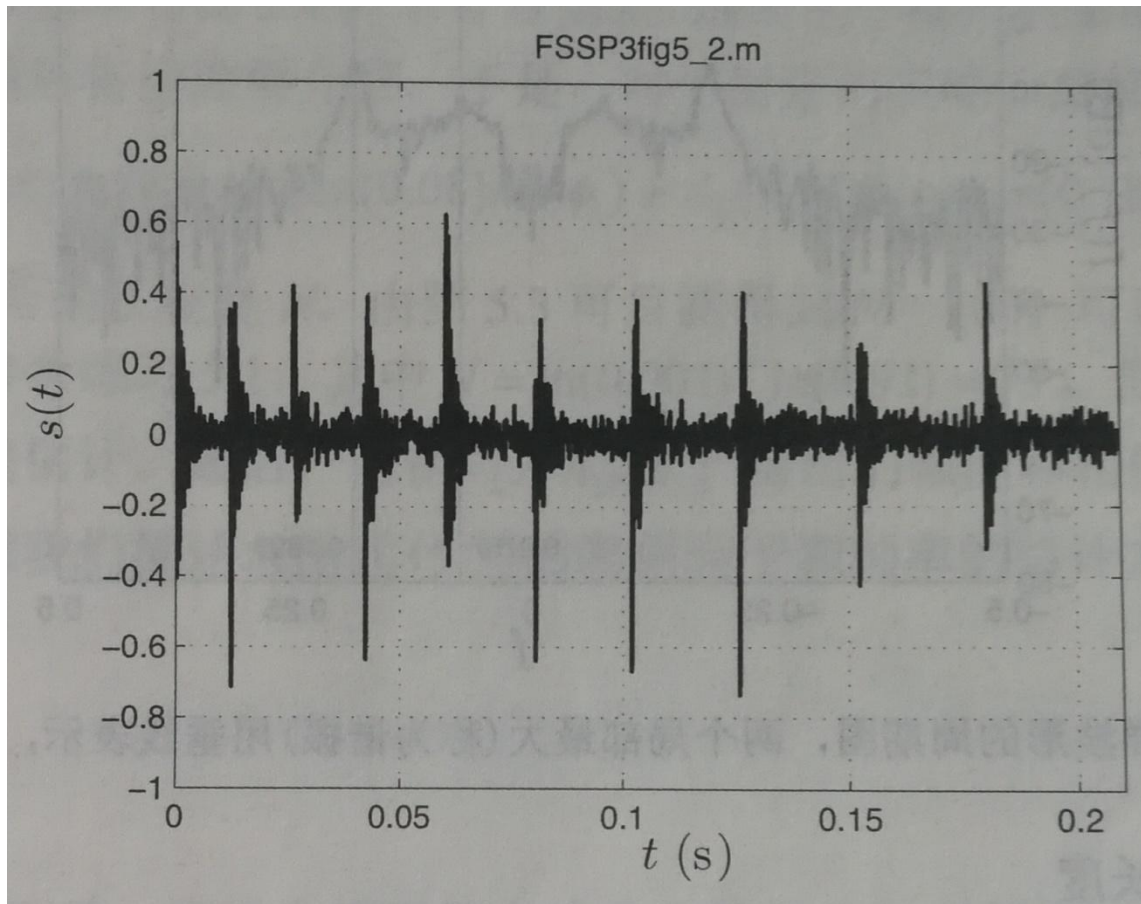
(2) 选择模型阶数。

(3) 选择参数的值，在固定算法中选择固定的参数，
在自适应算法中，参数值要在线计算。

2、信号模型类型 选择路线图



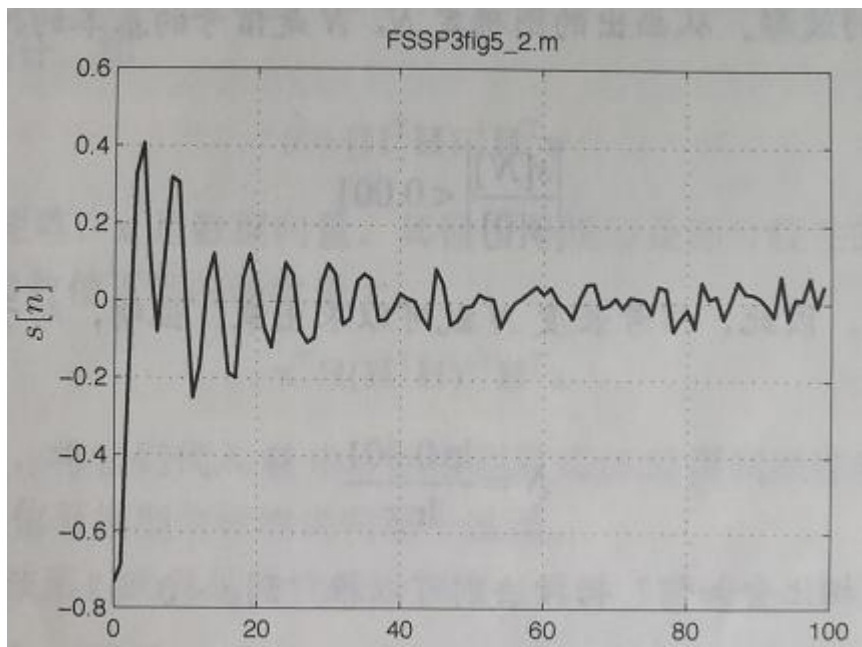
3、示例



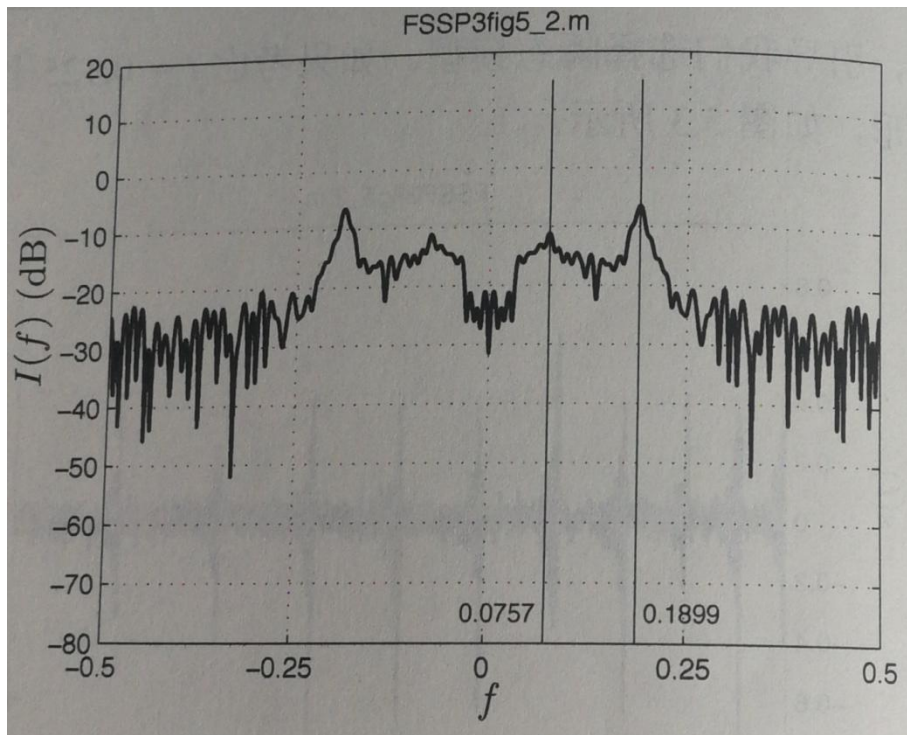
分析:

波形并没有重复，
选择瞬态模型。

指示轴承故障的加速计输出波形



t=0.125s的局部波形



功率谱

$$s[n] = \sum_{i=1}^2 A_i r_i^n \cos(2\pi f_i n + \phi_i) \quad n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1$$

估计: f_0, f_1

分析：

- (1) 两个频率是固定不变的。
- (2) 幅度和相位是变化的。

改造成自适应算法。

进一步思考:

(1) 模型阶数估计

如果两个频率相隔很近，难以看出明显的两个峰。采用指数嵌入簇方法，能产生良好的阶数估计。

(2) 参数估计

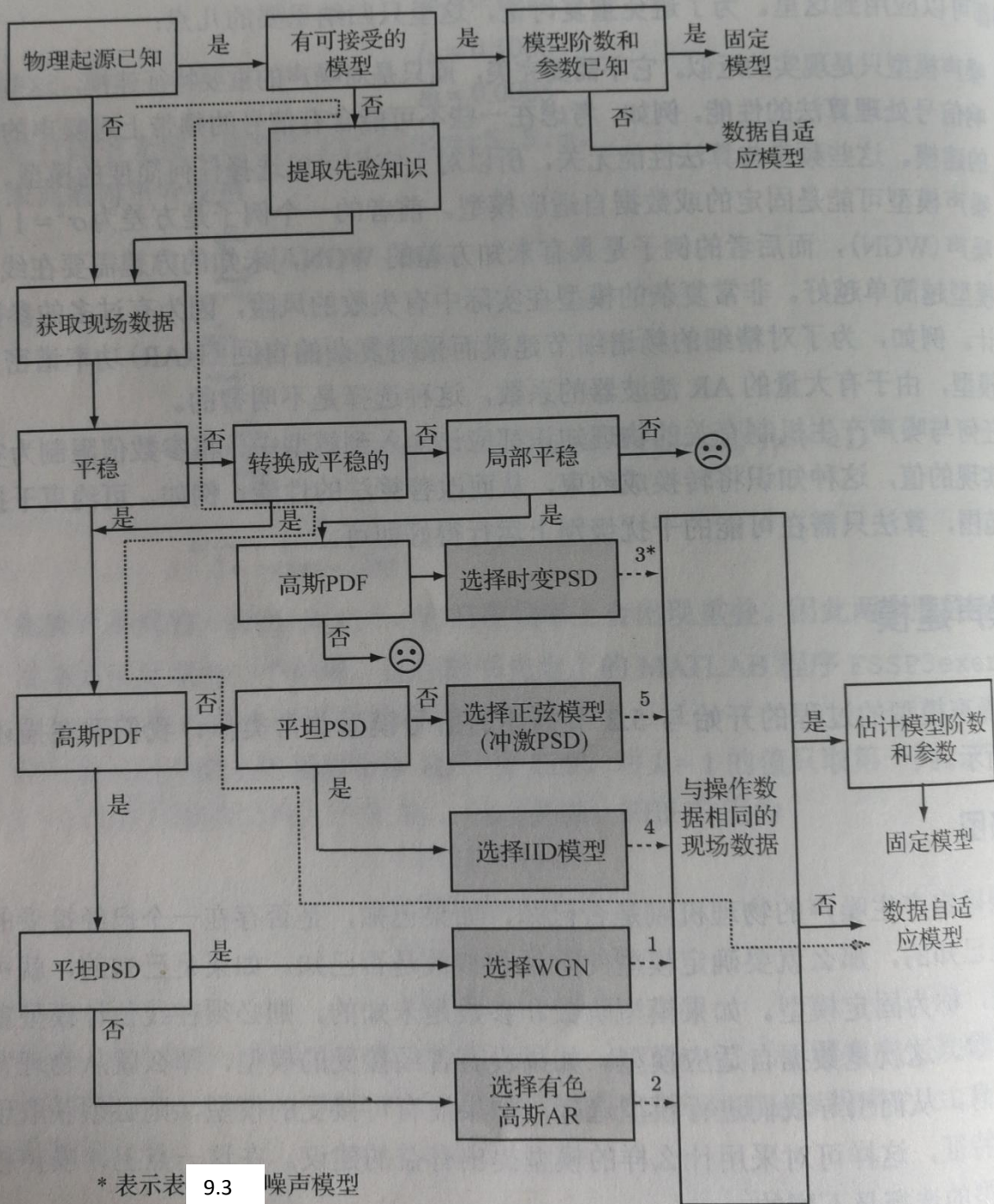
$$J = x^T H (H^T H)^{-1} H^T x$$

四、噪声模型选择

1、一般考虑

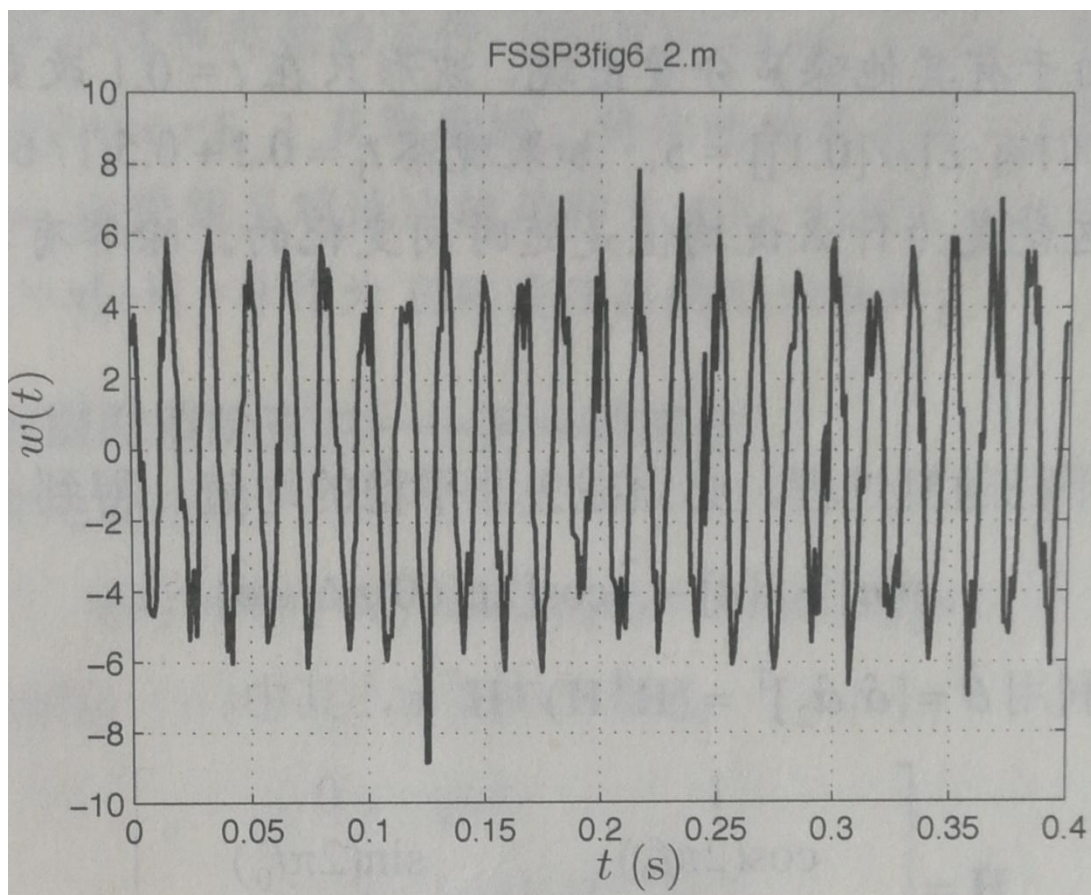
- (1) 噪声模型只是现实的近似。它不需要完美，而只是对噪声的重要特征建模。
- (2) 噪声模型可能是固定的或自适应的。
- (3) 模型越简单越好。非常复杂的模型，在实际中有失败的风险，因为有过多参数需要估计。
- (4) 任何与噪声产生机制有关的物理知识应加入模型。

2、噪声模型类型 选择路线图



3、示例

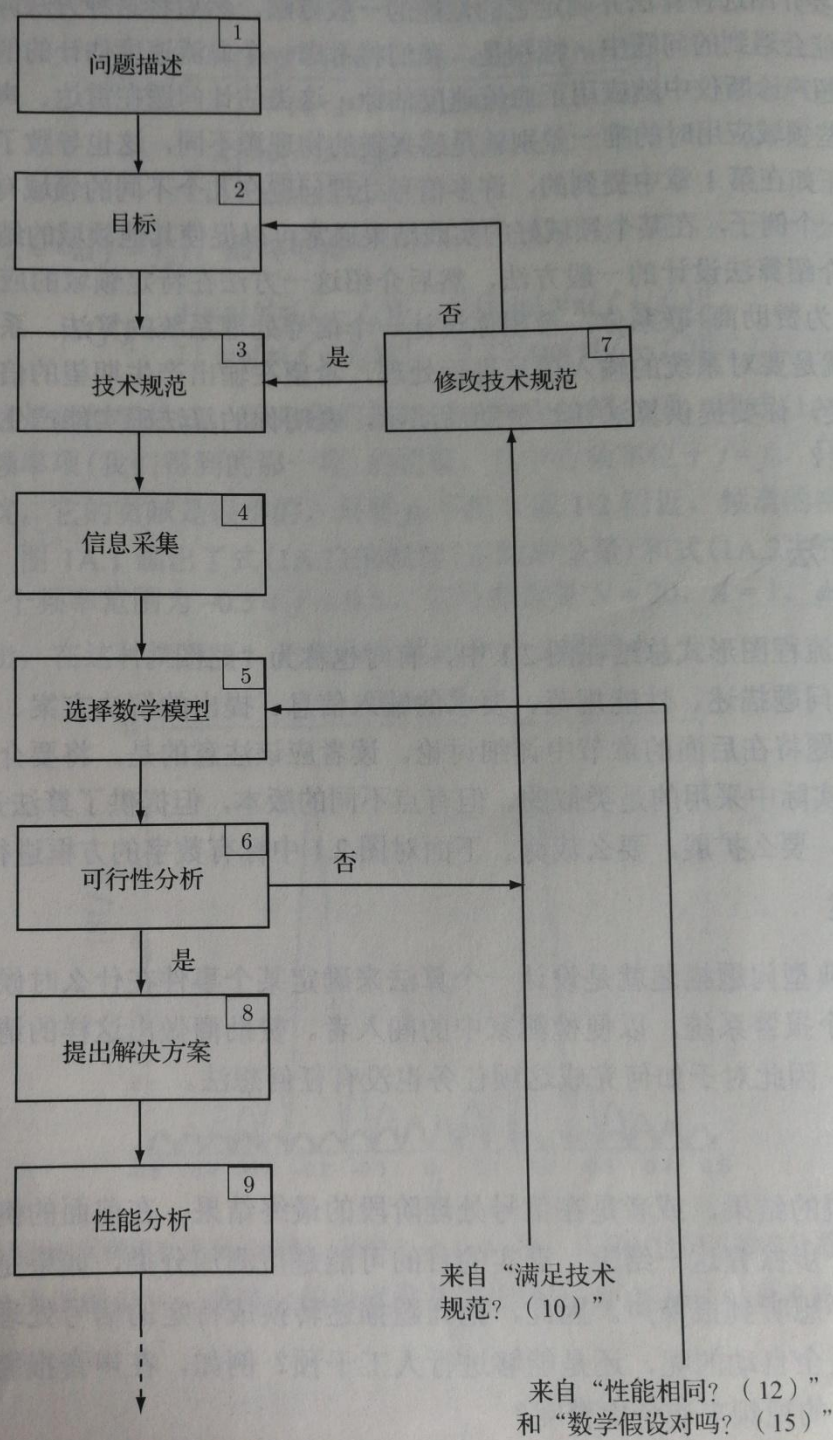
心电检测信号会受到人为移动噪声和60H的电源干扰。



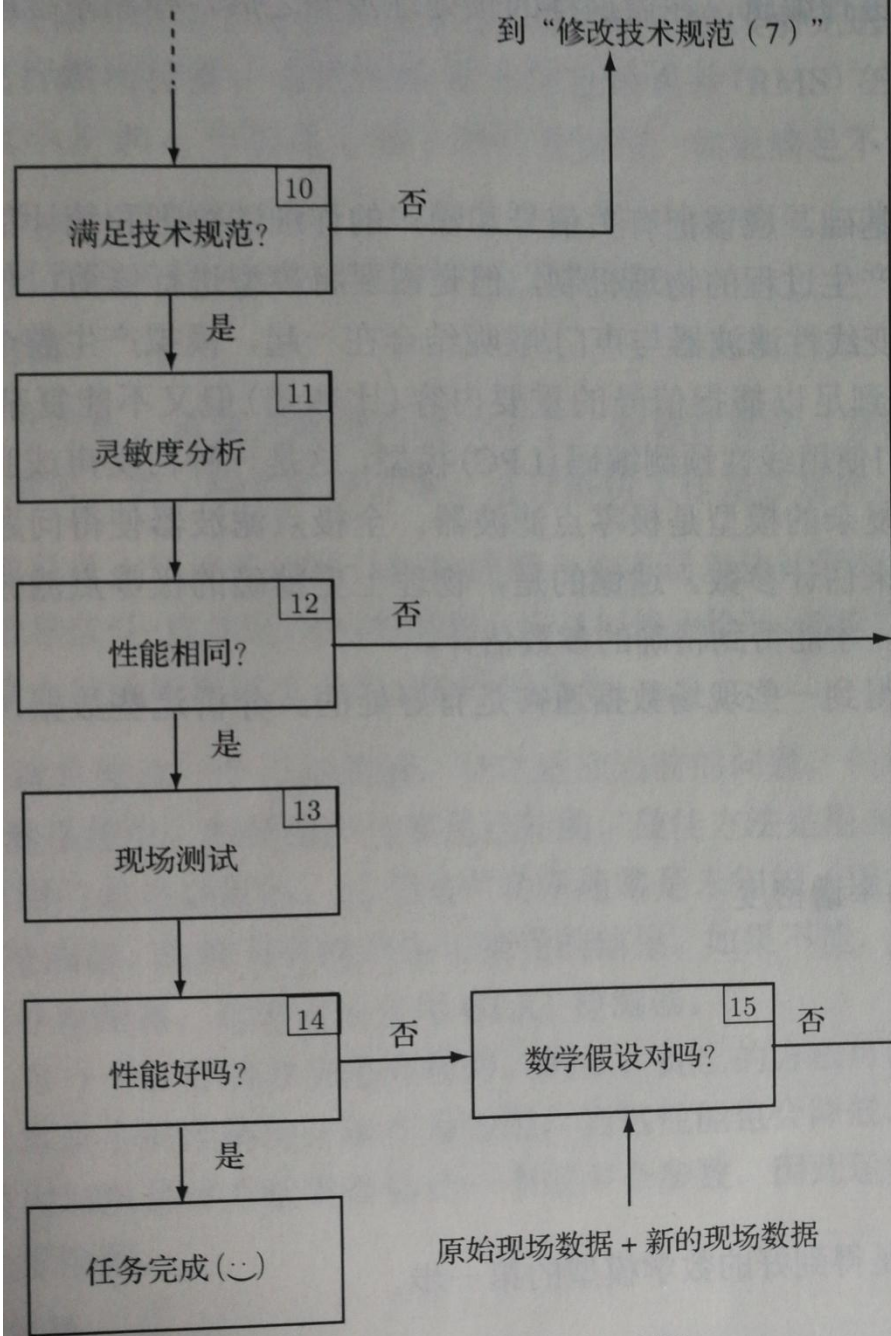
监护仪上观测的噪声波形

五、算法设计

1、算法设计方法



到“选择数学模型(5)



2、性能评估

3、测试与文档

六、案例研究（雷达多普勒中心频率估计）

1、问题描述

根据客户需求，在有限资源下，设计并实现一个具有实时性的、最优的多普勒频率估计器。

2、目标

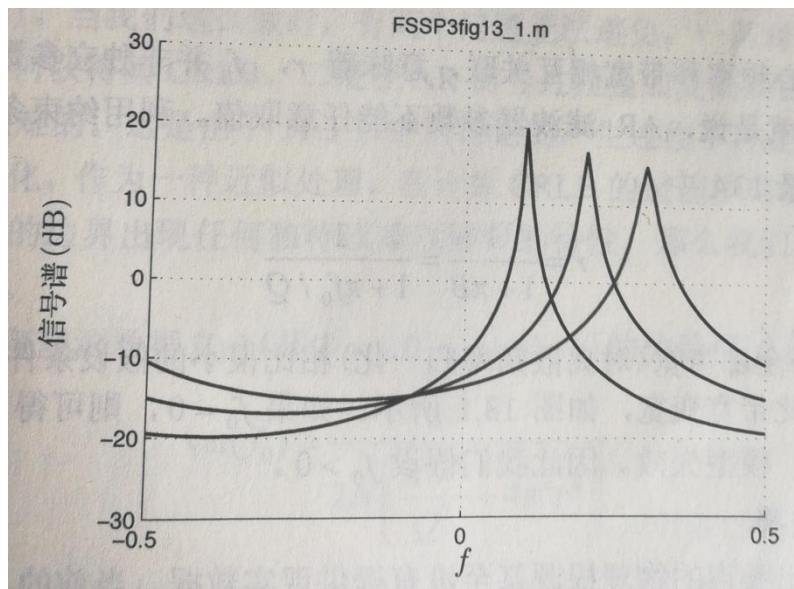
总的设计目标是，在不增加计算复杂度的基础上，使设计的估计器的性能超越现有的、基于快速傅里叶变换的估计器。

（基于FFT的估计器的基本原理：首先利用FFT获得信号的幅度谱，其次将信号幅度谱平方（周期图法）；再寻找最大峰值所对应的频率。性能：在复信号和高斯白噪声条件下，周期图法频率估计器是最大似然估计，是最优估计。）

3、信息获取

来源：雷达接收机完成下变频后，原始信号有一个模拟的带通信号转换为频率较低的复信号。

新发现：随着观测信号的中心频率的提高，信号的带宽也随之展宽。这一现象，并不符合现有估计器所做的确定性正弦信号模型。确定性正弦信号模型要求信号带宽不随信号中心频率的改变而改变。



为方便数学建模，不妨假设观测信号中心频率与带宽之比是固定的且已知。

$$Q = f_0 / B = 15$$

4、数学建模

(1) 信号建模

*依据信号模型选取流程，由于信号的物理机制无法确定，所以现有的模型无法应用。同时缺少实际数据支撑。

*使用哪种信号模型，应取决于“信息获取”中的分析来确定。

根据前面的分析，应从信号的随机过程、瞬态信号模型与周期信号模型中选取。

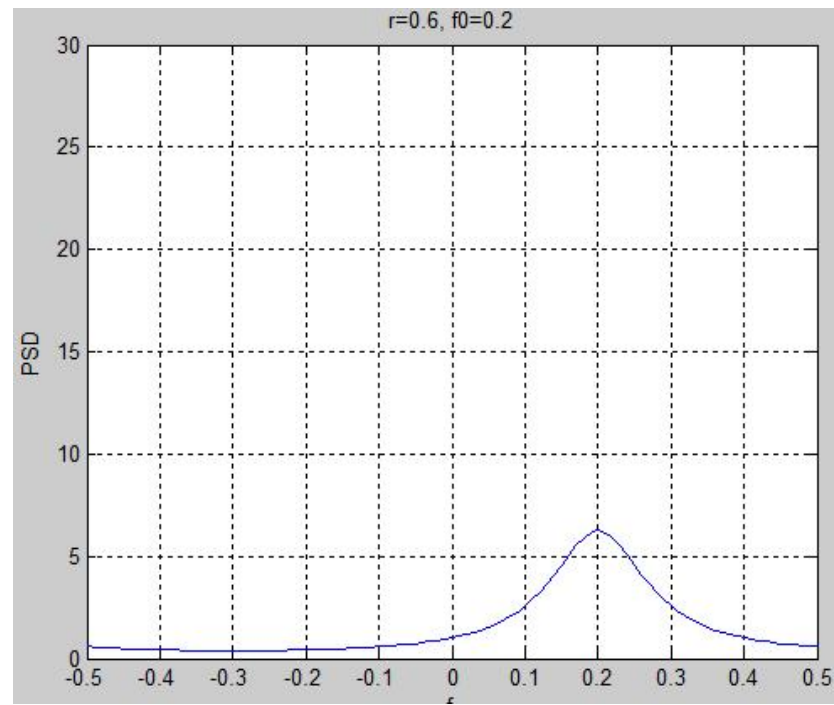
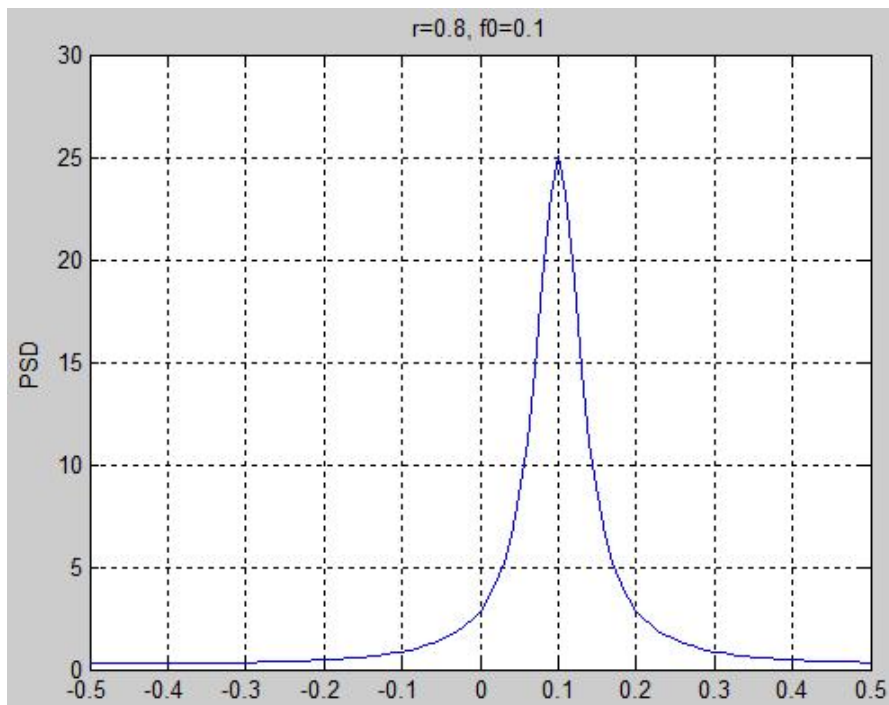
从当前面临的实际问题中，显然随机过程模型更好。因为平稳随机过程既可以定义窄带信号，又可以定义宽带信号，具有带宽适应能力。一阶复AR随机过程可用于带通信号建模。

$$\tilde{s}[n] + \tilde{a}_1 \tilde{s}[n-1] = \tilde{u}[n]$$

AR模型的极点： $z_p = -\tilde{a}[1]$

AR滤波器的参数如下： $\tilde{a}[1] = -r \exp(j2\pi f_0)$

则功率谱密度将在 $f=f_0$ 处有一个峰值，且该峰值的所对应的带宽由极点半径 r 确定。



对于AR(1)模型，可证明：
$$r = \frac{1}{1 + \pi B} = \frac{1}{1 + \pi f_0 / Q}$$

```
% This program computes and plots the complex AR(1) PSD for two different
% sets of the filter parameter.
clear all
close all
sig2u=1; % set AR parameters
r=0.8;f0=0.1;
a1=-r*exp(j*2*pi*f0);
f=[-0.5:0.01:0.5]'; % frequencies to compute PSD
Ps=sig2u./(abs(1+a1*exp(-j*2*pi*f)).^2); % calculate PSD
figure
plot(f,Ps)
xlabel('f')
ylabel('PSD')
title('r=0.8, f0=0.1')
grid
axis([-0.5 0.5 0 30]) % use same scaling for both plots to allow an
                        % easier visual comparison
r=0.6;f0=0.2; % repeat for new parameters
a1=-r*exp(j*2*pi*f0);
Ps=sig2u./(abs(1+a1*exp(-j*2*pi*f)).^2);
figure
plot(f,Ps)
xlabel('f')
ylabel('PSD')
title('r=0.6, f0=0.2')
grid
axis([-0.5 0.5 0 30])
```

(2) 噪声建模

同样地，没有提供噪声的物理根源，也没有现实数据提供。也未提及任何已色噪声或非高斯噪声为模型的雷达杂波。因此，噪声背景最有可能是环境噪声或电子噪声，具有平坦的功率谱密度。为了不过分复杂化这个问题，故而采用高斯白噪声的假设。

(3) 完整数学模型

$$\tilde{x}[n] = \tilde{s}[n] + \tilde{w}[n]$$

5、可行性研究

对于估计问题，对任何无偏估计的方差**计算CRLB**是很好的。

但**遇到两个问题**：一是对于复数观测数据，还没有描述如何获得CRLB；二是AR过程叠加复高斯白噪声的模型下，计算CRLB是十分困难的。

近似处理，忽略复高斯白噪声，可推导出CRLB近似为：

$$\text{var}(\hat{f}_0) \geq \frac{1-r^2}{2N \left(\frac{\pi^2 r^4}{Q^2} + 4\pi^2 r^2 \right)}$$

6、规范修改（如有必要）

没有可使用的。

7、解决方案

简化处理，假设没有加性噪声，面临的问题是估计一个高斯随机过程的中心频率。可获得中心频率最大似然估计的一个近似值。

$$J(f_0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{I(f)}{P_{\tilde{s}}(f - f_0)} df \quad 0 < f_{\min} < f_0 < f_{\max} < \frac{1}{2}$$

$$I(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \exp(-j2\pi f n) \right|^2$$

$$J(f_0) = \frac{1}{\sigma_{\tilde{u}}^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} I(f) |1 - r \exp(-j2\pi f_0)|^2 df$$

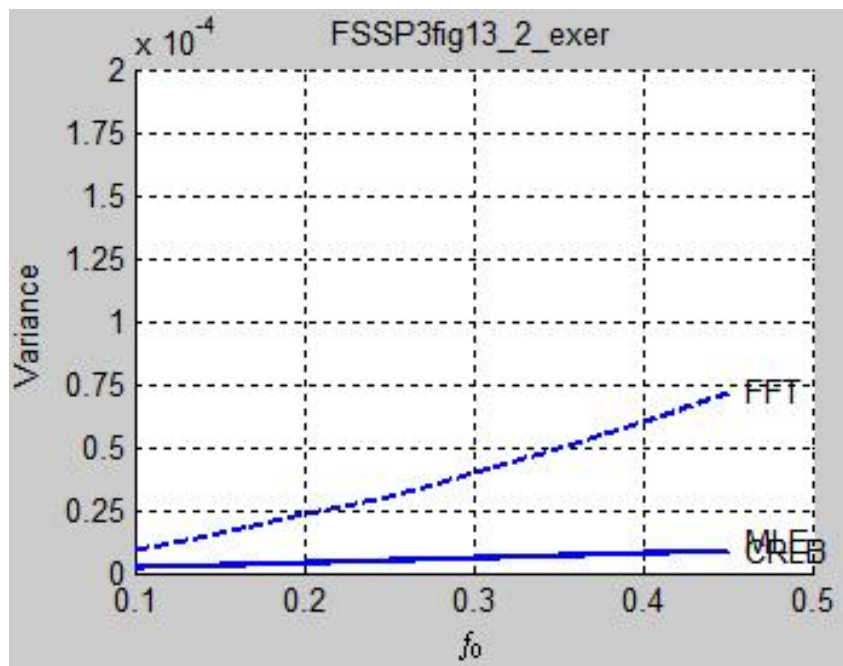
经过一系列的化简和近似，得到最终的目标函数：

$$J(f_0) = 1 + r^2 - 2r \operatorname{Re}[\hat{\rho}_s \exp(-j2\pi f_0)]$$

$\hat{\rho}_s$ 是 $k=1$ 时的归一化自相关序列的估计

8、性能分析

使用计算机仿真进行分析。通过刻画CRLB，作为确保估计结果合理性的手段，同时为估计性能提供基准。如果最大似然估计的性能优于CRLB，说明该估计很有可能是有偏的，或者推导或者编程有错误。因此，在使用CRLB之前，理应对估计结果的均值进行估计，以确保估计是无偏的。



```

% This program implements the MLE and FFT frequency
% estimators. Additionally the CRLB is used as a benchmark.
%
% External function subprograms required:
% ARgendata_complex.m
%
clear all
close all
randn('state',0) % initialize Gaussian random number generator
Q=15;
f0=[0.1:0.05:0.45]'; % set up values of center frequency to minimize
    % objective function over
r=1./(1+(pi*f0)/Q); % relate the pole radius to the center frequency
a1=-r.*exp(j*2*pi*f0); % set complex AR filter parameter
sig2u=1-abs(a1).^2; % set excitation white noise variance so that
    % the average power in the AR process is 1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
N=300;          % THIS IS INCREASED DATA RECORD LENGTH
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ntrials=10000;   % number of trials to use in Monte Carlo simulation
    % should increase number until the estimator
    % variance curve appears smooth

```

```

f0try=[0.05:0.001:0.5]'; % set up range for center frequency to be computed
% for objective function. Note that it is slightly larger than range of
% known values of f0. This is because otherwise, if the true value is say
% f0=0.1 and we compute the objective function starting at f0try=0.1, the
% error cannot be less than zero. This causes a bias in the estimator and
% nullifies the use of the CRLB. In practice, we seldom know exactly the
% range of f0 since it is usually a guess anyway. Furthermore, it makes
% the comparison with the periodogram fairer, which will search over
% [0,0.5] frequency range
rtry=1./(1+(pi*f0try)/Q); % range of possible pole radius
Nfft=2048; % FFT size to be used for periodogram
freq=[0:Nfft-1]'/Nfft; % frequencies to evaluate periodogram. We will
% only use the ones over the interval [0,0.5]

```

```

for k=1:length(f0) % start loop over center frequencies
for i=1:ntrials % start loop over Monte Carlo trials
x=ARgendata_complex(a1(k),sig2u(k),N); % generate complex AR signal
per=(1/N)*abs(fft(x,Nfft)).^2; % compute periodogram
[mm ll]=max(per(1:Nfft/2-1)); % find maximum and location of maximum over
% the frequency range [0,0.5]
f0hat_per(i,k)=freq(ll); % find the frequency of maximum
rhatat=sum(conj(x(1:N-1)).*x(2:N))/(x'*x); % compute normalized autocorrelation
% at lag k=1
for l=1:length(f0try) % start loop for objective function
J(l,1)=1+rtry(l)^2-2*rtry(l)*real(rhatat*exp(-j*2*pi*f0try(l)));
end

```

```

[mm l]=min(J); % find minimum and location of minimum of objective function
f0hat(i,k)=f0try(l); % find MLE of center frequency
end
end
for k=1:length(f0) % compute the variances of MLE and periodogram
    var(k,1)=(1/ntrials)*sum( (f0hat(:,k)-mean(f0hat(:,k))).^2 );
    var_per(k,1)=(1/ntrials)*sum( (f0hat_per(:,k)-mean(f0hat_per(:,k))).^2 );
end
f0lb=[0.1:0.01:0.45]'; % set up frequency range over which to compute CRLB
rlb=1./(1+(pi*abs(f0lb))/Q);
den=2*N*((pi^2*rlb.^2)/Q^2+4*pi^2*rlb.^2);
crlb=(1-rlb.^2)./den; % compute CRLB - see (13.4)

```

```

figure % the rest of this code is for plotting
axes('position',[0.2,0.2,4*(0.375/3),4*(0.375/3)])
    line(f0,var,'linewidth',1.5)
    line(f0,var_per,'linewidth',1.5,'linestyle','--')
    line(f0lb,crlb,'linewidth',1)
    grid
xlabel('$f_0$', 'interpreter', 'Latex')
ylabel('Variance')
text(0.46,max(crlb),'CRLB')
text(0.46,max(var)+0.03e-4,'MLE')
text(0.46,max(var_per),'FFT')
axis([0.1 0.5 0 2e-4])
set(gca,'YTick',[0:0.25:2]*1e-4)
title('FSSP3fig13\_2\_exer')

```

```
% ARgendata_complex.m
%
% This program generates data samples of a complex AR random process
% given the complex filter coefficients and excitation noise variance.
% The starting transient is eliminated
% because the initial conditions of the filter are specified to
% place the filter output in statistical steady state.
%
% This program has been converted from Fortran to Matlab. See "Modern
% Spectral Estimation" by S. Kay for further details.
%
% Input Parameters:
%
%   a   - Complex array of dimension px1 of AR filter parameters
%         arranged as a(1) to a(p)
%   sig2u - Variance of excitation noise
%   N    - Number of complex data points desired
%
% Output Parameters:
%
%   x    - Complex array of dimension Nx1 of complex data samples
%
% External Function Subprograms Required: stepdown_complex.m
%
% Notes:
%   The user must ensure that the AR filter parameters chosen
%   result in a stable all-pole filter.
```

```

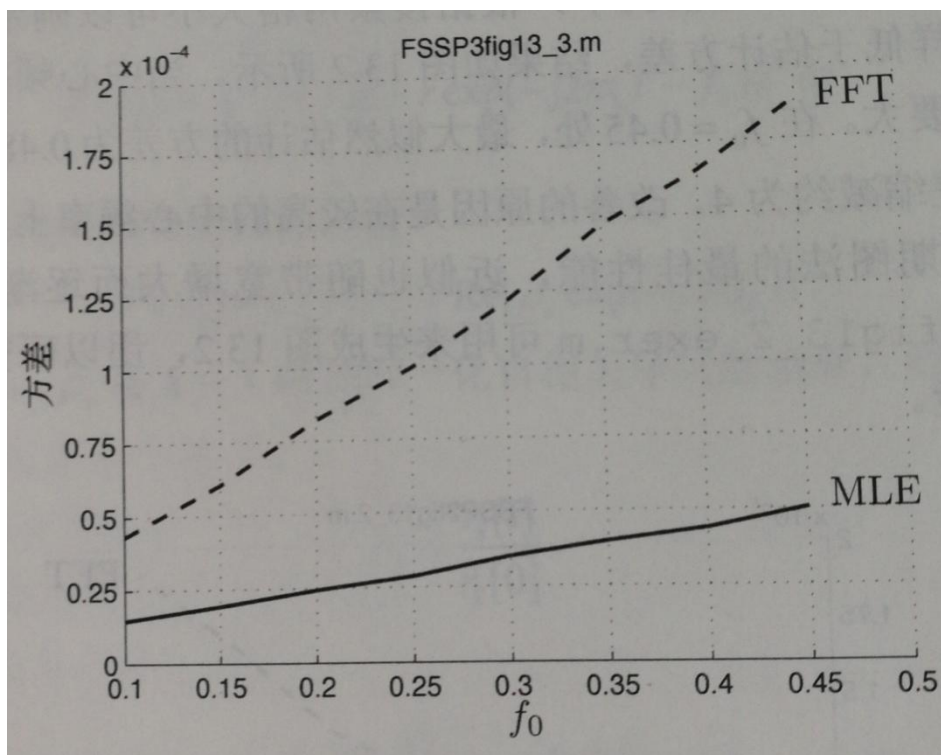
function x=ARgendata_complex(a,sig2u,N)
p=length(a);
v=(1/sqrt(2))*randn(N,1)+j*(1/sqrt(2))*randn(N,1);
if p==1 % for p=1 need only set the first sample to steady state value
rho0=sig2u/(1-abs(a(1))^2);
x(1,1)=sqrt(rho0)*v(1);
else
[aa,rho0,rho]=stepdown_complex(a,sig2u); % for p>1 must set the first
% p samples as initial conditions for the IIR filter in steady state
% these are obtained using the stepdown procedure
x(1,1)=sqrt(rho0)*v(1); % set up initial conditions of filter
for k=2:p
x(k,1)=sqrt(rho(k-1))*v(k);
for ll=1:k-1
x(k,1)=x(k,1)-aa(ll,k-1)*x(k-ll,1);
end
end
end
for k=p+1:N % using the steady state initial conditions generate
% the remaining samples required
x(k,1)=sqrt(sig2u)*v(k);
for ll=1:p
x(k,1)=x(k,1)-a(ll)*x(k-ll,1);
end
end
end

```

9、灵敏度分析

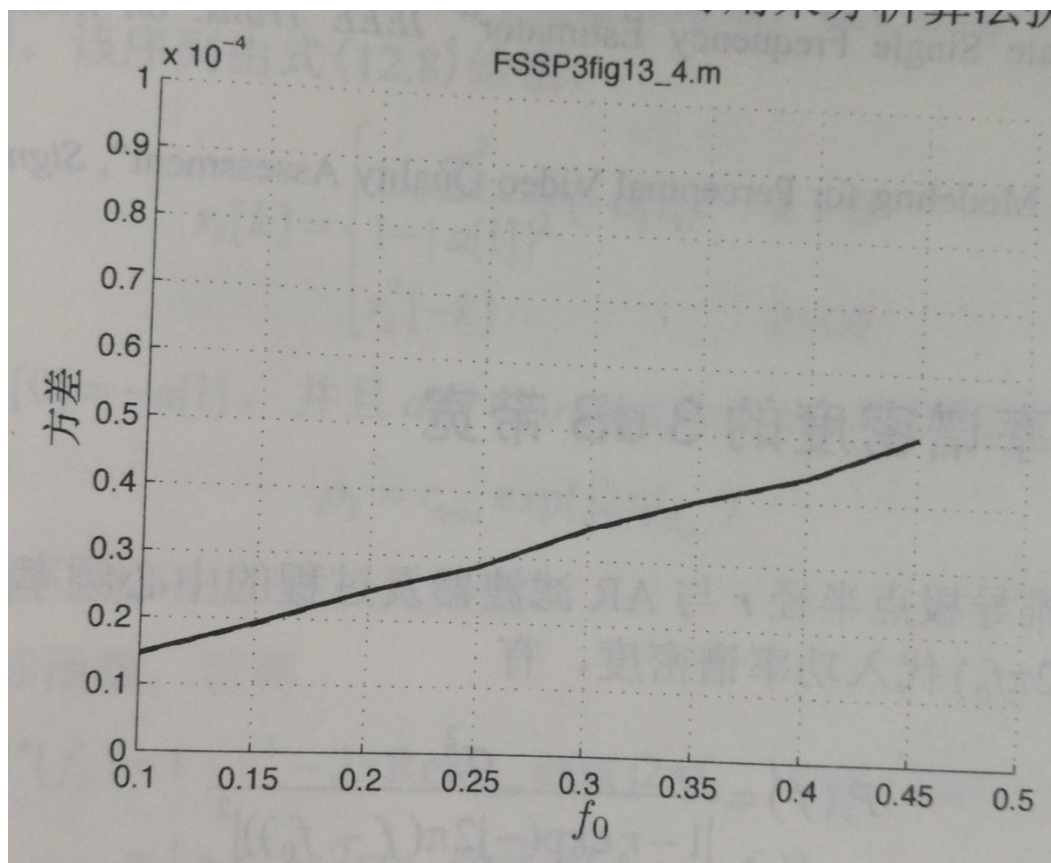
灵敏度分析要求评估加性噪声对估计性能的影响。

$$\sigma^2 = 0.01$$



10、现场测试

为了现场测试，必须降低算法复杂度。



放映结束

