

傅里叶变换性质



一、一维傅里叶变换

(1) 连续形式

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

频率

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

角频率

(2) 离散形式

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$
$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M}$$
$$f'(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} = \sum_{u=0}^{M-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \right] e^{j2\pi ux/M}$$
$$= \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \left[\sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \right] e^{j2\pi ux/M}$$
$$= f(x)$$

系数 $1/M$ 也可以放在反变换前，有时也可在傅立叶正变换和逆变换前分别乘以 $(1/M)^{1/2}$ 。

但应注意：正变换和逆变换前系数乘积必须等于 $1/M$ 。

思考题：为什么正变换和逆变换前系数乘积必须等于 $1/M$ ？

(3) 傅里叶谱

$$F(u) = R(u) + jI(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$$

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)} \quad \text{傅里叶幅度谱或频率谱}$$

$$\phi(u) = \arctan \frac{I(u)}{R(u)} \quad \text{傅里叶相位谱}$$

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u) \quad \text{功率谱}$$

二、二维傅里叶变换公式

(1) 连续形式

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

(2) 离散形式

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

练习：有一个2*2的图像，其中 $f(0, 0)=3$, $f(0, 1)=5$, $f(1, 0)=4$,

$f(1, 1)=2$ ，求该图像的傅里叶幅度谱。

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$e^{-j\pi} = ?$$

$$e^{-j2\pi} = ?$$

第1步：结合具体图像，
推导出更具体的公式。

第2步：计算傅里叶谱。

第3步：计算傅里叶幅度谱。

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2} \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{2} + \frac{vy}{2})}$$

$$= \frac{1}{4} [f(0,0) + f(0,1)e^{-j\pi v} + f(1,0)e^{-j\pi u} + f(1,1)e^{-j\pi(u+v)}]$$

$$F(0,0) = \frac{1}{4} [f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1)] = \frac{1}{4} [3 + 5 + 4 + 2] = \frac{7}{2}$$

$$F(0,1) = \frac{1}{4} [f(0,0) + f(0,1)e^{-j\pi} + f(1,0) + f(1,1)e^{-j\pi}]$$

$$= \frac{1}{4} [3 - 5 + 4 - 2] = 0$$

$$F(1,0) = ?$$

$$F(1,1) = ?$$

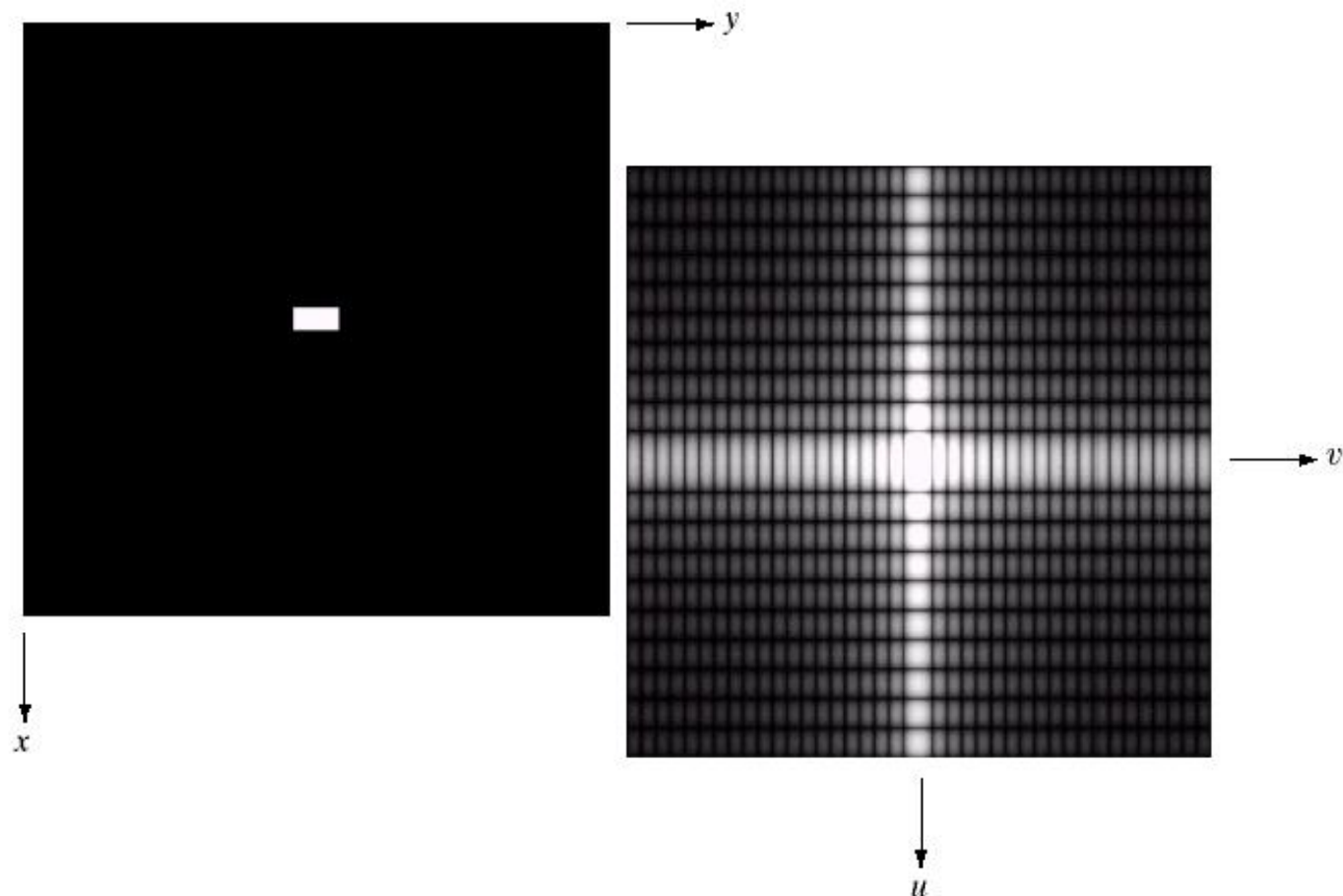
$$\therefore |F(0,0)| = \frac{7}{2}, \quad |F(0,1)| = 0, \quad |F(1,0)| = ?, \quad |F(1,1)| = ?$$

a b

FIGURE 4.3

(a) Image of a 20×40 white rectangle on a black background of size 512×512 pixels.

(b) Centered Fourier spectrum shown after application of the log transformation given in Eq. (3.2-2). Compare with Fig. 4.2.



三、傅里叶变换的性质

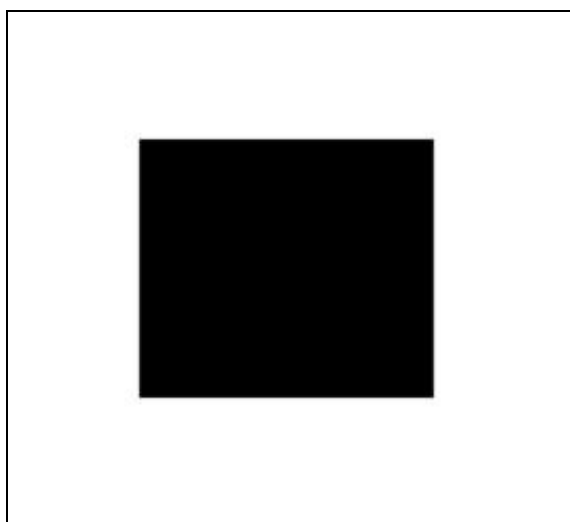
(1) 可分性（用于快速二维傅里叶变换）

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{vy}{N}} \right) e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x, v) e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \end{aligned}$$

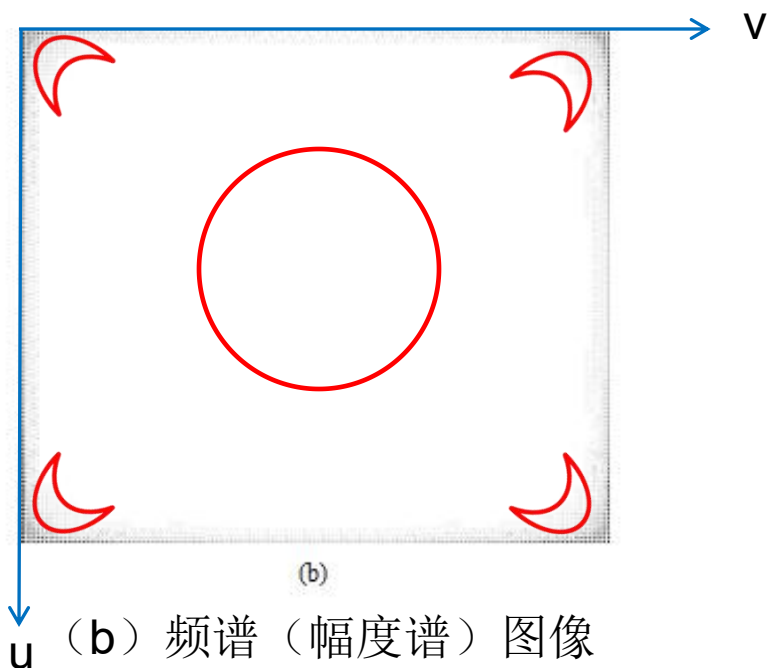
(2) 共轭对称性

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| = |F(M - u, N - v)|$$



(a) 原始图像



(b) 频谱 (幅度谱) 图像

思考：在频谱图像中，高频在哪里？低频在哪里？

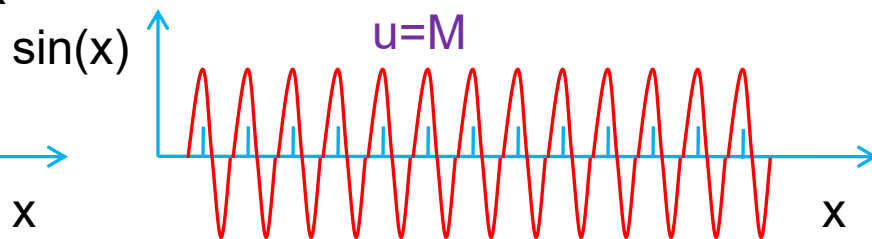
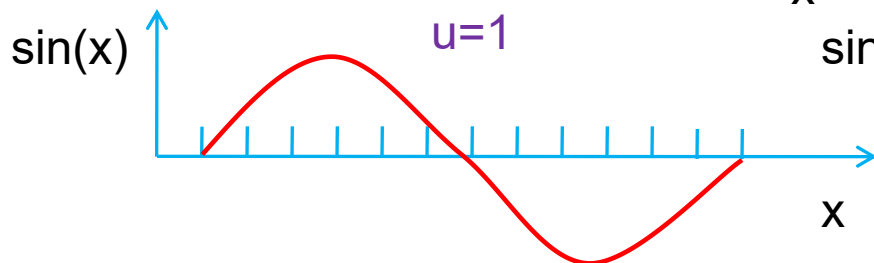
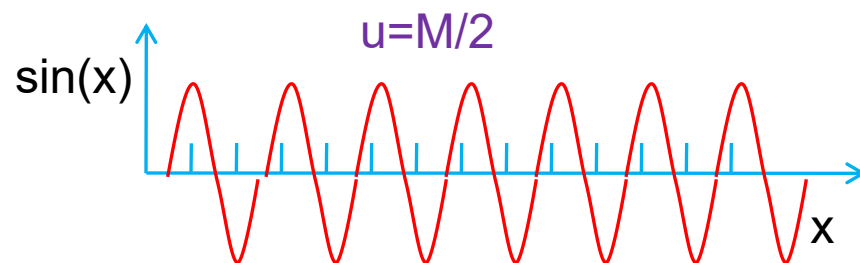
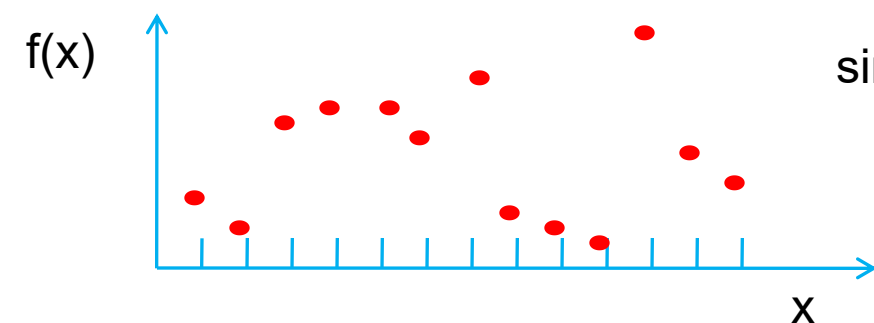
※实际频率与名义频率：

$F(u)$: u 值的大小，对应名义频率；限定于半周期内的频率，实际频率。

举例： $F(2)$, $F(nM+1)$; $F(5)$, $F(M-3)$ 。

※ M 个离散点，最高频率 $\leq M/2$

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$



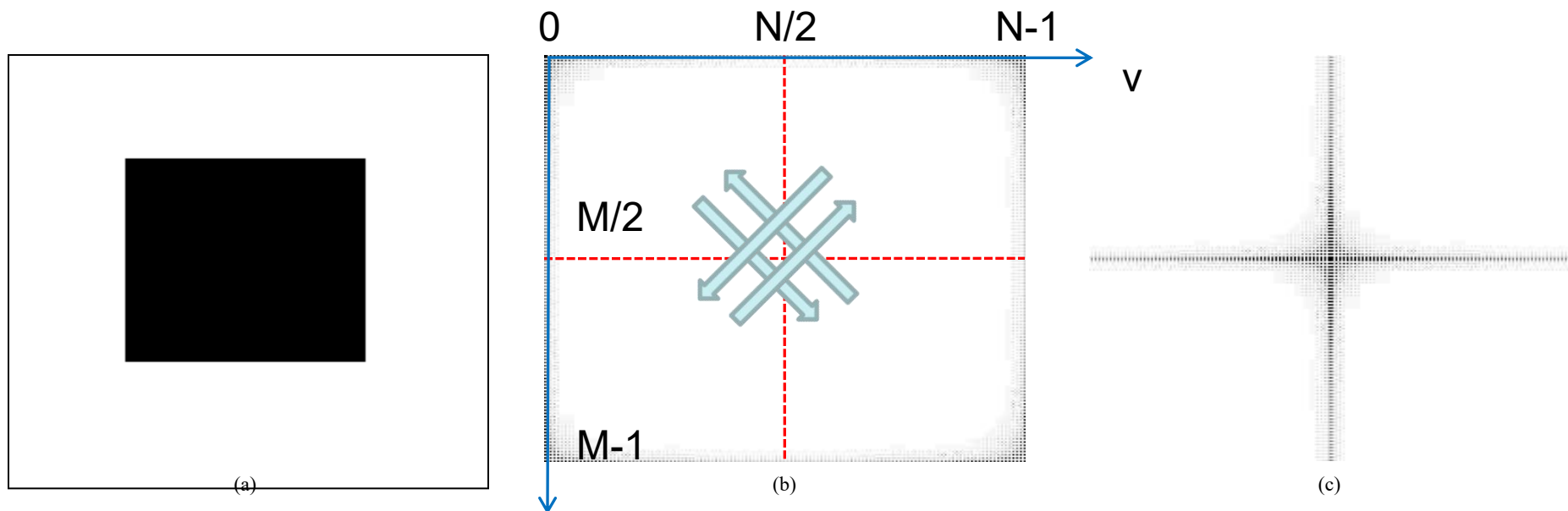
(3) 平移性质（用于频域中心化操作）

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2})$$

$$f(x - \frac{M}{2}, y - \frac{N}{2}) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{(u+v)}$$

思考题：请解释下面的图像处理过程。

$$u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2} \xrightarrow{\text{左上分区}} u - \frac{M}{2} + M, v - \frac{N}{2} + N$$



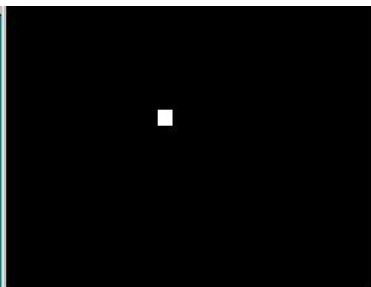
傅立叶频谱平移示意图

(a) 原图像；

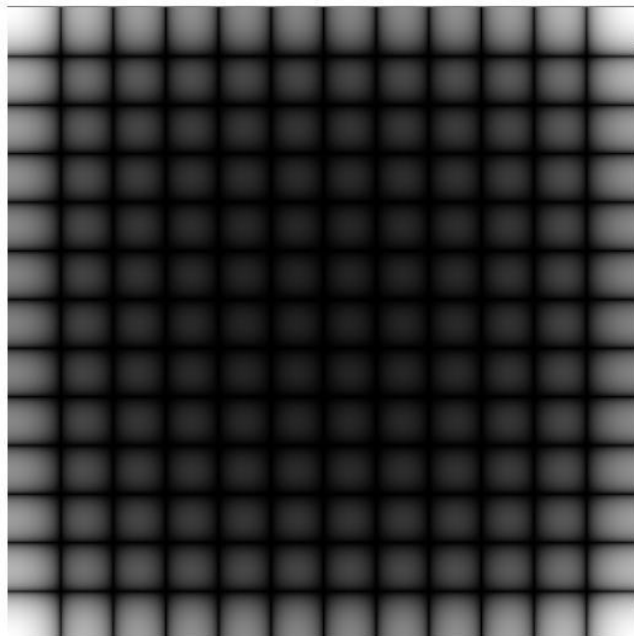
(b) 无平移的傅立叶频谱；

(c) 平移后的傅立叶频谱

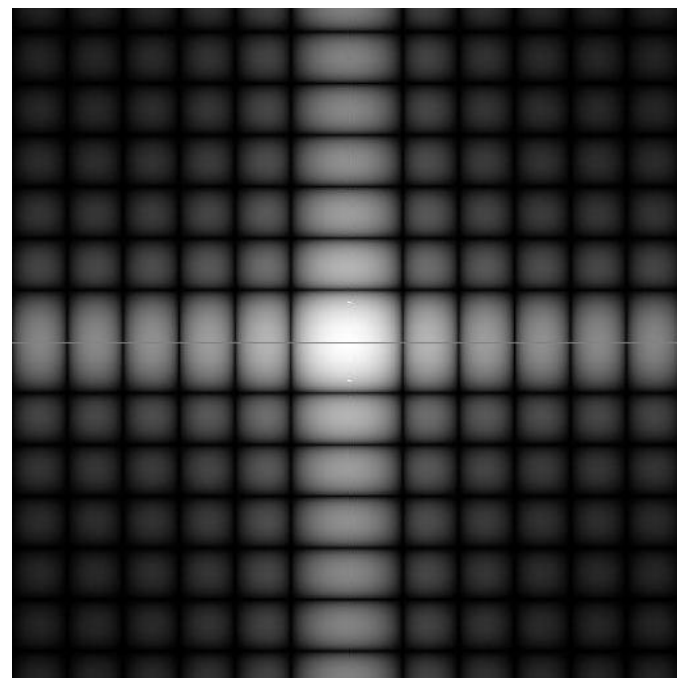
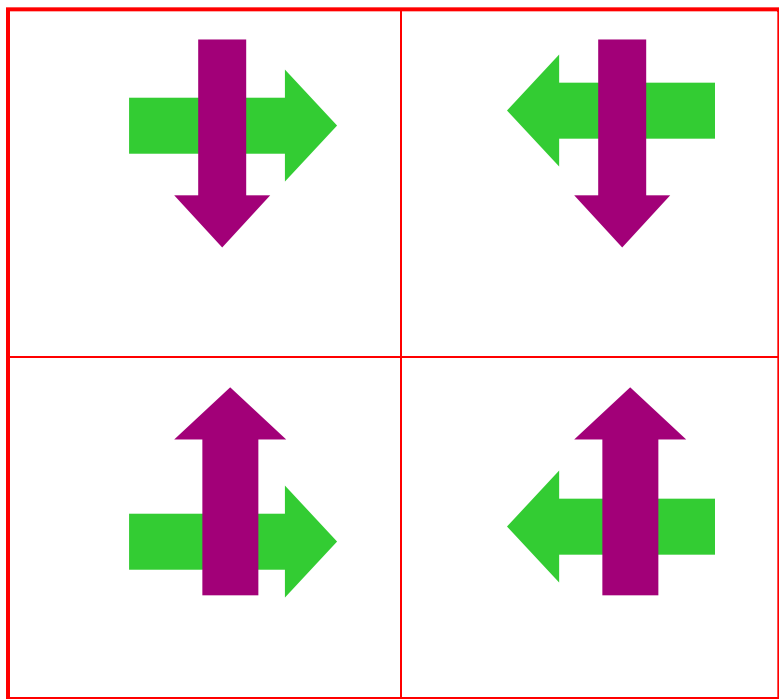
思考：频谱图像中心化操作的目的是什么？



原图



FFT后的图



补充：基于频率域的图像复杂度测量方法

一、问题

有些图像处理方法适用于图像细节丰富的图像，有些图像处理方法适用于图像细节贫乏的图像。

图像复杂度可作为图像描述的一种方法。

但如何测量图像复杂度？

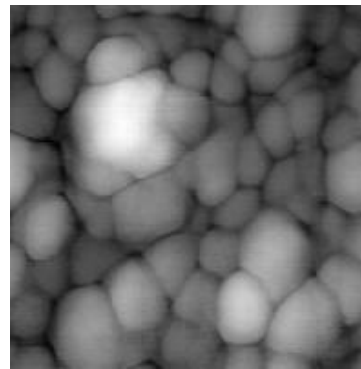
二、创新思路

在频率域中，图像细节丰富的图像有什么特点？图像细节贫乏的图像有什么特点？

三、技术路线

高频分量在图像中所占的比重。

四、实验结果



	paper1.tif	alumgrns.tif	afmsurf.tif	trees.tif	lena.tif
频率域方法	0.0147	0.0245	0.0205	0.0293	0.0404
熵	1.7695	4.9733	4.7793	3.9514	5.0222

请思考：

在时域中，图像细节丰富的图像有什么特点？图像细节单调的图像有什么特点？

在时频域中呢？

在 Z 变换域呢？

在 S 域呢？

...

休息一下

