

新编《信息、控制与系统》系列教材  
清华大学研究生精品教材立项项目



北京市高等教育精品教材立项项目

# Problems and Solutions for Modern signal Processing

## 现代信号处理习题与解答

张贤达 编著

Zhang Xianda



TUP  
清华大学出版社



Springer

## 内容简介

本书是研究生教材《现代信号处理》（第二版）的配套参考书，由随机信号、参数估计理论、现代谱估计、自适应滤波器、高阶统计分析、时频信号分析的线性变换与非线性变换共7章组成。每章先系统总结现代信号处理的有关主要理论和方法，然后编排有关习题，并给出了全部习题的详细解答。所选习题分为复习型、应用型、补充型共三种类型；复习型帮助读者复习与掌握教材的基本内容，应用型包括了一定数量富有启发的应用问题，补充型则提供了教材以外的一些现代信号处理理论和方法。

本书和《现代信号处理》（第二版）配套为清华大学研究生精品课计划教材和北京市高等教育精品教材，可供电子、通信、自动化、计算机、物理、生物医学和机械工程等各学科有关教师、研究生和科技人员教学、自学、进修或考研之用。

## 作者简介



张贤达，1946年生于江西省兴国县，1970年毕业于原西安军事电信工程学院，1982年获哈尔滨工业大学硕士学位，1987年于日本东北大学获工学博士学位，后在University of California at San Diego做博士后一年。曾在原航空航天部304研究所任高级工程师和研究员多年，1992年9月调入清华大学自动化系任教授，1993年被批准为博士生导师。1999年4月—2002年3月任西安电子科技大学特聘教授（教育部“长江学者奖励计划”）。现任清华大学自动化系教授、博士生导师，西安电子科技大学兼职教授、博士生导师。研究方向为信号处理、智能信号处理及在雷达、通信、音频信号中的应用。曾以第一获奖人获得国家自然科学奖四等奖1项、部级科技进步奖一等奖1项和二等奖2项，以第一发明人获国家发明专利4项。在国际权威杂志IEEE汇刊上发表论文近30篇，出版学术著作5部、教材1部。1997年，被国家教育部和人事部评为“全国优秀留学回国人员”。

ISBN 7-302-06529-2



9 787302 065296 >

定价：29.80 元

新编《信息、控制与系统》系列教材

清华大学研究生精品教材立项项目

北京市高等教育精品教材立项项目

# 现代信号处理习题与解答

PROBLEMS AND SOLUTIONS  
FOR MODERN SIGNAL PROCESSING

张贤达 编著

清华大学出版社 Springer

## 内 容 简 介

本书是研究生教材《现代信号处理》的配套参考书,由随机信号、参数估计理论、现代谱估计、自适应滤波器、高阶统计分析、时频信号分析的线性变换与非线性变换等7章组成。每章先系统总结现代信号处理的有关主要理论和方法,然后编排有关习题,并给出了全部习题的详细解答。所选习题分为复习型、应用型、补充型共三种类型;复习型帮助读者复习与掌握教材的主要内容;应用型包括了一定数量富有启发的应用问题;补充型则提供了教材以外的一些现代信号处理理论和方法。

本书和《现代信号处理》配套为清华大学研究生精品课计划教材和北京市高等教育精品教材,可供电子、通信、自动化、计算机、物理、生物医学和机械工程等各学科有关教师、研究生和科技人员教学、自学、进修或考研之用。

版权所有,翻印必究。

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

### 图书在版编目(CIP)数据

现代信号处理习题与解答/张贤达编著. —北京:清华大学出版社,2003

(新编《信息、控制与系统》系列教材)

ISBN 7-302-06529-2

I. 现… II. 张… III. 信号处理—研究生—习题 IV. TN911.7-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025954 号

出 版 者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

[http:// www. tup. com. cn](http://www.tup.com.cn)

责任编辑: 王一玲

印 刷 者: 北京鑫丰华彩印有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 787×1092 1/16 印张: 24 字数: 490 千字

版 次: 2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-06529-2/TN·140

印 数: 0001~3000

定 价: 29.80 元

## 新编《信息、控制与系统》系列教材 出版说明

信息、控制与系统学科是在 20 世纪上半叶形成和发展起来的一门新兴技术科学。在人类探索自然和实现自动化的进程中，信息、控制与系统学科的理论、方法和技术始终起着重要的和基础的作用。基于信息、控制与系统科学的自动化的发展和应用水平在一定意义上是一个国家和社会的现代化程度的重要标志之一，本系列教材是关于信息、控制与系统学科所属各个领域的基本理论和前沿技术的一套高等学校系列教材。

本系列教材所涉及的范围包括信号和信息处理、模式识别、知识工程、控制理论、智能控制、过程和运动控制、传感技术、系统工程、机器人控制、计算机控制和仿真、网络化系统、电子技术等方面。主要读者对象为自动控制、工业自动化、计算机科学与技术、电气工程、机械工程、化工工程和热能工程等系科有关的高年级大学生和研究生，以及工作于相应领域和部门的科学工作者和工程技术人员。

10 多年前，清华大学出版社会同清华大学自动化系，曾经组织出版过一套《信息、控制与系统》系列教材，产生了较大的社会影响，其中多数著作获得过包括国家级教学成果奖和部委优秀教材奖在内的各种奖励，至今仍为国内众多院校所采用，并被广大相关领域科技人员作为进修和自学读物。我们现在组编的这套新编《信息、控制与系统》系列教材，从一定意义上说，就是先前那套教材的延伸和发展，以反映近些年来学科的发展和在科学研究与教学实践上的新成果和新进展，以适应当前科技发展和教学改革的新形势和新需要。列入这套新编系列教材中的著作，大多是清华大学自动化系开设的课程中经过较长教学实践而形成的，既有多年教学经验和教学改革基础上的新编著的教材，也有部分原系列教材的更新和修订版本。这套新编系列教材总体上仍将保持原系列教材求新与求实的风格，力求反映所属领域的基本理论和新进展，力求做到学科先进性和教学适用性统一。需要说明的是，此前我们曾以《信息技术丛书》为名组编这套教材，并已出版了若干种著作。现为使“书”和“名”更为相符，这些已出版的著作将在重印或再版时列入这套新编系列教材。

我们希望，这套新编系列教材，既能为在校大学生和研究生的学习提供内容先进、论述系统和教学适用的教材或参考书，也能为广大科学工作者与工程技术人员的知识更新与继续学习提供适合的和有价值的进修或自学读物。我们同时要感谢使用本系列教材的广大教师、学生和科技工作者的热情支持，并热忱欢迎提出批评和意见。

新编《信息、控制与系统》系列教材编委会  
2002 年 6 月

## 新编《信息、控制与系统》系列教材编委会

**顾 问** 李衍达 吴 澄 边肇祺 王桂增

**主 编** 郑大钟

**编 委** 徐文立 王 雄 萧德云 杨士元 肖田元

张贤达 周东华 钟宜生 张长水 王书宁

范玉顺 蔡鸿程

## 前 言

随着信号处理学科的迅速发展，我国很多大学都开设了现代信号处理的有关研究生课程。在教学过程中，许多研究生反映，很多理论和方法似乎懂了，但面对一些习题却感到无从下手。有些习题即使做了，也不知道结果正确与否。“不会做习题”成了学习现代信号处理课程的一只拦路虎，影响了学习效果，甚至让部分研究生感到现代信号处理课难学。授课老师也因此布置、批改作业和考试出题方面为难。为了帮助广大师生系统掌握现代信号处理的有关理论、方法与应用，克服教学过程中所遇到的困难，笔者编著了本书。

本书由随机信号、参数估计理论、现代谱估计、自适应滤波器、高阶统计分析、时频信号分析的线性变换与非线性变换等 7 章组成。每章包含三部分内容：第一部分总结与复习该章所涉及的现代信号处理主要理论和方法，第二部分为习题，第三部分则提供该章所有习题的详细解答。

全书共选编了 170 道习题。我们选编和解答这些习题的原则是：重点帮助读者复习和掌握好有关理论和方法，同时培养读者理论联系实际的能力。本书选编的习题大致可划分为三种类型：复习型依据有关现代信号处理的主要理论和方法而编选，帮助读者学习与掌握教材的主要内容；应用型针对一些不太复杂的实际问题，启发读者如何运用所学到的理论和方法解决实际中的应用问题；补充型习题要求读者推导或证明一些在一般教材中不讲授的理论和方法，作为对教材内容的拓展。

本书的主要目的不是帮助读者如何应试，而是体会如何学以致用、如何进行研究。需要指出的是，应用型习题主要启发读者如何将学到的理论、方法应用于解决工程实际问题，而补充型习题则主要帮助读者如何将所学到的理论和方法在理论上作进一步的展开或推广。前者是学以致用这一环节不可或缺的，后者的主要目的是培养读者进行有关理论基础研究和应用基础研究方面的兴趣和能力。当然，计算机仿真也是学习现代信号处理课程的一个重要环节，但本书未列入这类习题，因为这类习题的主要任务是编程，参考答案不方便给出。

《现代信号处理》已被列入清华大学研究生精品课计划和北京市高等教育精品教材。笔者先行出版的研究生教材《现代信号处理》(第 2 版)和本书都是在这两项计划的资助下完成的。本书可视为与《现代信号处理》配套的教学参考书。这两本书反映了作者在清华大学与西安电子科技大学的一系列研究成果和近十年的教学实践。这些研究和教学得到了国家自然科学基金、教育部高等学校博士点专项基金、教育部“长江学者奖励计划”等的资助。

在本书的编写中，采纳了我的十几位博士、硕士研究生和其他很多听课研究生的意见和建议。博士研究生高秋彬、吕齐，硕士研究生苏泳涛、彭春翌仔细阅读和校对了书稿，并解答了少量习题。

本书的部分习题和解答是在参考并引用了有关文献的基础上，结合本人的理解完成的。应当提请读者注意的是，不要把书中提供的习题解答看作是“标准解答”，它们只是“参考解答”而已。作者希望，本书的习题解答能够起到抛砖引玉的作用，引发“一题多解”和更好的解答。

张贤达

2002年12月谨识于清华园

# 目 录

<b>第 1 章 随机信号</b> .....	1
1.1 主要理论与方法 .....	1
1.2 习题 .....	10
1.3 习题解答 .....	18
<b>第 2 章 参数估计理论</b> .....	49
2.1 主要理论与方法 .....	49
2.2 习题 .....	56
2.3 习题解答 .....	62
<b>第 3 章 现代谱估计</b> .....	93
3.1 主要理论与方法 .....	93
3.2 习题 .....	111
3.3 习题解答 .....	121
<b>第 4 章 自适应滤波器</b> .....	157
4.1 主要理论与方法 .....	157
4.2 习题 .....	173
4.3 习题解答 .....	181
<b>第 5 章 高阶统计分析</b> .....	219
5.1 主要理论与方法 .....	219
5.2 习题 .....	240
5.3 习题解答 .....	246

---

<b>第 6 章 时频信号分析——线性变换</b> .....	277
6.1 主要理论与方法 .....	277
6.2 习题 .....	300
6.3 习题解答 .....	306
<b>第 7 章 时频信号分析——非线性变换</b> .....	333
7.1 主要理论与方法 .....	333
7.2 习题 .....	347
7.3 习题解答 .....	351
<b>参考文献</b> .....	367

# 第 1 章 随 机 信 号

本章首先复习随机信号的基本概念、协方差函数和功率谱密度的定义与性质。接着，从独立性、不相关性、正交性和相干性这四种基本统计关系出发，讨论如何进行两个随机信号之间的比较与识别。随后，介绍正交信号变换、双正交信号变换和非正交信号变换的基本理论。最后，以被随机信号激励的线性系统为对象，分析系统输出与输入之间的统计量的关系，对两个随机信号之间的关系作更深入一步的描述。

## 1.1 主要理论与方法

若信号在每个时刻的取值为随机变量，则称之为随机信号或随机过程。

### 1.1.1 随机信号的特性

随机信号具有以下特点：

- 随机信号在任何时间的取值都是不能先验确定的随机变量。
- 虽然随机信号取值不能先验确定，但这些取值却服从某种统计规律。换言之，随机信号或过程可以用概率分布特性（简称统计性能）统计地描述。

复随机信号  $\{x(t)\}$  的自相关函数定义为

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x^*(t_2)\} \quad (1.1.1)$$

协方差函数定义为

$$C_{xx}(\tau) = E\{[x(t_1) - \mu_x(t_1)][x(t_2) - \mu_x(t_2)]^*\} \quad (1.1.2)$$

式中  $\mu_x(t) = E\{x(t)\}$  为信号在时刻  $t$  的均值。

#### 1. 广义平稳

复随机信号  $\{x(t)\}$  称为广义平稳信号，若

- (1) 其均值为常数，即  $E\{x(t)\} = \mu_x$  (常数)；

(2) 其二阶矩有界, 即  $E\{x(t)x^*(t)\} = E\{|x(t)|^2\} < \infty$ ;

(3) 其协方差函数与时间的起点无关, 只与时间差 (滞后) 有关, 即  $C_{xx}(\tau) = E\{[x(t) - \mu_x][x(t - \tau) - \mu_x]^*\}$ .

广义平稳也称协方差平稳、弱平稳等, 简称平稳信号。

## 2. 严格平稳

随机信号  $\{x(t)\}$  称为严格平稳的过程, 若随机变量组  $\{x(t_1 + \tau), \dots, x(t_k + \tau)\}$  和  $\{x(t_1), \dots, x(t_k)\}$  的联合分布函数对所有  $\tau > 0$  和  $(t_1, \dots, t_k)$  均相同, 其中  $k = 1, 2, \dots$ .

文字叙述为: 概率密度分布函数与时间无关的随机信号  $x(t)$  称为严格平稳信号。

以下是  $n$  阶平稳、广义平稳、严格平稳和非平稳之间的关系:

(1) 广义平稳是  $n = 2$  时的  $n$  阶平稳;

(2) 严格平稳一定是广义平稳, 但广义平稳不一定是严格平稳;

(3) 由于不是广义平稳的随机过程不可能是  $n > 2$  阶平稳的和严格平稳的, 所以不具有广义平稳性的随机信号统称非平稳信号。

与随机信号统计量密切相关的一个重要问题是: 从随机信号的一次观测记录是否可以估计其统计量 (如相关函数、功率谱等)。这一问题称为信号的遍历性。

令  $\{x(t)\}$  是一个平稳信号, 它的  $n$  阶及较低阶的所有矩都是与时间无关的。称该信号是  $n$  阶矩均方遍历的, 若对于所有  $k = 1, 2, \dots, n$  和所有整数  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , 恒有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N x(t+t_1)x(t+t_2) \cdots x(t+t_k) - \mu(t_1, \dots, t_k) \right|^2 \right\} = 0 \quad (1.1.3)$$

当一个信号是  $n$  阶矩均方遍历的平稳过程时, 它的  $n$  阶及所有低阶的统计平均都可以用各自的时间平均来代替。换句话说, 这些统计量均可以根据该信号的一次观测数据进行估计。均方遍历性是对平稳随机信号的一个基本假设。

### 1.1.2 单个平稳随机信号的二阶统计量

#### 1. 自相关函数

$$R_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{x(t)x^*(t-\tau)\} \quad (1.1.4)$$

#### 2. 自协方差函数

$$C_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{[x(t) - \mu_x][x(t-\tau) - \mu_x]^*\} = R_{xx}(\tau) - |\mu_x|^2 \quad (1.1.5)$$

数学性质:

$$R_{xx}^*(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad (1.1.6)$$

$$C_{xx}^*(\tau) = C_{xx}(-\tau) \quad (1.1.7)$$

$$|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0), \quad \forall \tau \quad (1.1.8)$$

式中  $\forall \tau$  表示对于所有  $\tau$  成立。

相互关系:

(1) 对于具有零均值的随机信号  $x(t)$  而言, 自协方差函数与自相关函数等价, 即

$$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) \quad (1.1.9)$$

(2) 当  $\tau = 0$  时, 信号  $x(t)$  的自相关函数退化为  $x(t)$  的二阶矩, 即

$$R_{xx}(0) = E\{x(t)x^*(t)\} = E\{|x(t)|^2\} \quad (1.1.10)$$

(3) 当  $\tau = 0$  时, 信号  $x(t)$  的自协方差函数退化为  $x(t)$  的方差, 即

$$\begin{aligned} C_{xx}(0) &= \text{var}[x(t)] = E\{[x(t) - \mu_x][x(t) - \mu_x]^*\} \\ &= E\{|x(t) - \mu_x|^2\} = E\{|x(t)|^2\} - |\mu_x|^2 \\ &= R_{xx}(0) - |\mu_x|^2 \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

3. 功率谱密度

$$P_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.1.12)$$

数学性质:

- (1) 功率谱密度  $P_{xx}(f)$  是实的;
- (2) 功率谱密度是非负的, 即  $P_{xx}(f) \geq 0$ ;
- (3) 自协方差函数是功率谱密度的 Fourier 反变换, 即

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (1.1.13)$$

特别地, 当  $\tau = 0$  时,  $C_{xx}(0)$  给出信号  $x(t)$  的能量, 即

$$E = C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) df \quad (1.1.14)$$

(4) 功率谱密度对频率的积分给出信号  $\{x(t)\}$  的方差, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) df = \text{var}[x(t)] = E\{|x(t) - \mu_x|^2\} \quad (1.1.15)$$

(5) 若  $\{x(t)\}$  是零均值 ( $\mu_x = 0$ ) 的随机过程, 则协方差函数与相关函数等价, 即  $C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau)$ , 此时, 式 (1.1.12) 和式 (1.1.13) 分别等价于

$$P_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.1.16)$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (1.1.17)$$

式 (1.1.16) 和式 (1.1.17) 描述的关系称为 Wiener-Khinchine 定理, 其文字表述为: 任意一个零均值的广义平稳随机过程的功率谱  $P_{xx}(f)$  和它的自相关函数  $R_{xx}(\tau)$  组成一个 Fourier 变换对。

(6) 对于零均值的随机过程  $\{x(t)\}$ , 功率谱的积分等于零滞后 ( $\tau = 0$ ) 处的相关函数, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) df = E\{|x(t)|^2\} = R_{xx}(0) \quad (1.1.18)$$

### 1.1.3 两个平稳随机信号的二阶统计量

#### 1. 互相关函数

$$R_{xy}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E\{x(t_1)y^*(t_2)\} \quad (1.1.19)$$

#### 2. 互协方差函数

$$C_{xy}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E\{[x(t_1) - \mu_x][y(t_2 - \tau) - \mu_y]^*\} = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y^* \quad (1.1.20)$$

数学性质:

$$R_{xy}^*(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (1.1.21)$$

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq |R_{xx}(0)| |R_{yy}(0)|, \quad \forall \tau \quad (1.1.22)$$

$$C_{xy}^*(\tau) = C_{yx}(-\tau) \quad (1.1.23)$$

#### 3. 互相关系数

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} \quad (1.1.24)$$

#### 4. 互功率谱密度

$$P_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.1.25)$$

与功率谱密度  $P_{xx}(f)$  是频率  $f$  的实函数不同, 互功率谱密度是频率  $f$  的复函数。互功率谱密度的实部称为同相谱, 虚部称为正交谱。

## 5. 相干函数

$$C(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|P_{xy}(f)|}{\sqrt{P_{xx}(f)P_{yy}(f)}} \quad (1.1.26)$$

数学性质:

- (1) 相干函数是实函数;
- (2) 相干函数的模小于或等于 1, 即  $|C(f)| \leq 1$ .

## 1.1.4 两个平稳随机信号的统计关系

## 1. 统计独立

称随机信号  $x(t)$  与  $y(t)$  统计独立, 若

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (1.1.27)$$

式中  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$  分别是  $x(t)$  和  $y(t)$  的概率密度函数。

## 2. 统计不相关

称随机信号  $x(t)$  与  $y(t)$  统计不相关, 若

$$C_{xy}(\tau) = E\{[x(t) - \mu_x][y(t - \tau) - \mu_y]^*\} = 0, \quad \forall \tau \quad (1.1.28)$$

## 3. 正交

称随机信号  $x(t)$  与  $y(t)$  正交, 若

$$R_{xy}(\tau) = E\{x(t)y^*(t - \tau)\} = 0, \quad \forall \tau \quad (1.1.29)$$

统计独立、统计不相关和正交之间的关系:

(1) 统计独立一定意味着统计不相关, 但逆叙述一般不成立。惟一的例外是高斯随机过程: 任意两个高斯随机过程的统计不相关和统计独立是等价的。

(2) 若  $x(t)$  和  $y(t)$  的均值均等于零, 则不相关与正交彼此等价。

对于两个零均值的高斯信号而言, 统计独立、统计不相关和正交三者等价。

## 4. 相干信号

随机信号  $x(t)$  和  $y(t)$  为相干信号, 若

$$|\rho_{xy}(\tau_0)| = 1, \quad \text{对某个 } \tau_0 \quad (1.1.30)$$

或

$$|C_{xy}(f)| = 1, \quad \forall f \quad (1.1.31)$$

### 1.1.5 Gram-Schmidt 标准正交化

一个线性独立的多项式序列  $\{f_i(x)\}$  可以通过 Gram-Schmidt 标准正交化变成另一个标准正交的多项式序列  $\{\phi_i(x)\}$ .

Gram-Schmidt 标准正交化算法:

$$\phi_1(x) = \frac{f_1(x)}{\|f_1(x)\|} \quad (1.1.32)$$

$$\phi_2(x) = \frac{f_2(x) - \langle f_2(x), \phi_1(x) \rangle \phi_1(x)}{\|f_2(x) - \langle f_2(x), \phi_1(x) \rangle \phi_1(x)\|} \quad (1.1.33)$$

⋮

$$\phi_k(x) = \frac{f_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k(x), \phi_i(x) \rangle \phi_i(x)}{\left\| f_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k(x), \phi_i(x) \rangle \phi_i(x) \right\|}, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (1.1.34)$$

Gram-Schmidt 标准正交化矩阵范数算法:

$$d_k = \begin{vmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_1, f_k \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_2, f_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_{k-1}, f_1 \rangle & \langle f_{k-1}, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_{k-1}, f_k \rangle \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_k \end{vmatrix} \quad (1.1.35)$$

$$\phi_k = \frac{d_k}{\langle d_k, d_k \rangle^{1/2}}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.36)$$

### 1.1.6 信号的级数展开与积分变换

基函数是信号的级数展开与积分变换的基本要素。

#### 1. 基函数

令  $x(t) \in L^2(R)$ , 称  $\{\phi_k(t)\}$  是 Hilbert 空间的一组基函数, 若

(1)  $\phi_k(t), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  相互线性独立, 即对于任意  $k$ ,  $\phi_k(t)$  不可能是其他元素的线性组合;

(2)  $\langle x, \phi_k \rangle = 0 (\forall k \in Z)$  意味着  $x = 0$ 。

## 2. 对偶基函数

如果  $\{\phi_k(t)\}$  和  $\{g_k(t)\}$  是两组不同的基函数, 并且满足双正交条件

$$\langle g_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.1.37)$$

则称  $\{g_k(t)\}$  是  $\{\phi_k(t)\}$  的对偶基函数。

## 3. 标准正交基

基函数  $\{\phi_k(t)\}$  称为标准正交基, 若它满足以下两个条件:

$$\langle \phi_k, \phi_i \rangle = \int_a^b \phi_k(t) \phi_i^*(t) dt = 0, \quad \forall k \neq i \quad (1.1.38)$$

和

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle = \int_a^b |\phi_k|^2 dt = 1 \quad (1.1.39)$$

## 4. 信号的级数展开

信号  $x(t)$  可以用一组基函数  $\phi_k(t), k = -\infty, \dots, \infty$  展开为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) \quad (1.1.40)$$

信号的积分变换分为非线性变换、双正交变换与正交变换。

## 5. 信号非正交变换

若基函数  $g_k(t)$  不是信号级数展开基函数  $\phi_k(t)$  的对偶基, 则称积分变换

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g_k^*(t) dt \quad (1.1.41)$$

为信号  $x(t)$  的非正交变换。

## 6. 信号双正交变换

若  $g_k(t)$  是  $\phi_k(t)$  的对偶基, 则称积分变换 (1.1.41) 是信号  $x(t)$  的双正交变换。

## 7. 信号正交变换

若信号级数展开的基函数  $\phi_k(t)$  为标准正交基, 则积分变换

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_k^*(t) dt \quad (1.1.42)$$

称为信号  $x(t)$  的正交变换, 或称 Karhunen-Loeve 变换 (简称 K-L 变换)。

信号非正交变换、双正交变换与正交变换的关系:

(1) 非正交信号变换使用不同的级数展开基函数和信号变换基函数, 它们都是非正交基;

(2) 双正交信号变换在级数展开和信号变换中也使用两种不同的非正交的基函数, 但这两组基函数彼此正交(双正交)。

(3) 正交信号变换在级数展开和信号变换中使用同一组基函数, 并且这组基函数是正交基。

### 8. 基函数的标准正交化

如果  $f_1, \dots, f_n$  为基向量, 则通过 Gram-Schmidt 标准正交化公式

$$v_1 = f_1 \quad (1.1.43)$$

$$v_2 = f_2 - a_{21}f_1 \quad (1.1.44)$$

⋮

$$v_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}f_i \quad (1.1.45)$$

式中 
$$a_{k,i} = \frac{\langle f_k, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}, \quad k \geq 2, i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (1.1.46)$$

可以将它们转换成标准正交基向量  $\phi_1, \dots, \phi_n$ :

$$\phi_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.47)$$

## 1.1.7 线性系统的输出

### 1. 系统输出方程

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x^*(t-u)du \quad (1.1.48)$$

$$= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h^*(t-u)du \quad (1.1.49)$$

式中  $x(t)$  为系统输入;  $h(t)$  为系统冲激响应。

### 2. 系统传递函数

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad (1.1.50)$$

### 3. 系统输出的自协方差函数

$$C_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\tau - u_1 + u_2)h(u_1)h^*(u_2)du_1 du_2 \quad (1.1.51)$$

## 4. 系统输出的功率谱密度

$$P_{yy}(f) = P_{xx}(f)|H(f)|^2 \quad (1.1.52)$$

即是说, 线性系统输出信号的功率谱密度等于输入信号的功率谱密度与系统传递函数的模平方之乘积。

## 5. 带通滤波器

一滤波器称为带通滤波器, 若其传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & a < f < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.53)$$

式中  $b > a$ 。

特别地, 当  $b - a$  取很小的值时, 滤波器为窄带带通滤波器。

## 6. 带阻滤波器

一滤波器称为带阻滤波器, 若其传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 0, & a < f < b \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.54)$$

式中  $b > a$ 。

## 7. 低通滤波器

一滤波器称为低通滤波器, 若其传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f < f_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.55)$$

## 8. 高通滤波器

一滤波器称为高通滤波器, 若其传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f > f_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.56)$$

## 1.2 习 题

**题 1.1** 由

$$x(t) = \begin{cases} 1 \cdot q(t), & \text{以概率 } p \\ -1 \cdot q(t), & \text{以概率 } 1-p \end{cases}$$

描述的随机过程称为 Bernoulli 过程。式中,  $q(t) = [u(t - (n-1)T) - u(t - nT)]$ ,  $n$  是某个整数,  $T$  是某个参数, 而  $u(t)$  为单位阶跃函数, 即

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

试求  $x(t)$  的概率密度函数。

**题 1.2** 考虑信号

$$x(t) = A \cos(\omega_c t + \pi/2)$$

式中  $0 \leq t \leq T$ ,  $f_c = \frac{1}{2T}$ , 而  $\omega_c = 2\pi f_c$  称为载频。这一信号的幅值为随机变量, 即

$$A = \begin{cases} 1 \cdot q(t), & \text{以概率 } p \\ -1 \cdot q(t), & \text{以概率 } 1-p \end{cases}$$

式中  $q(t) = [u(t - (n-1)T) - u(t - nT)]$ , 其中  $n$  是某个整数,  $T$  是某个参数, 而  $u(t)$  为单位阶跃函数。这一信号称为幅度键控 (amplitude shift keying, ASK) 信号, 求其联合概率密度函数。

**题 1.3** 令

$$x(t) = \sin(\alpha t)$$

为一随机变量, 式中  $\alpha$  是一随机变量, 并且具有有界的四阶矩, 即  $E\{|\alpha|^4\} < \infty$ 。试求随机变量  $x$  导数的均值

$$m_{x'} = E \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\}$$

**题 1.4** 一实随机过程  $\{x(t)\}$  的样本均值由下式给出:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

并且

$$\begin{aligned} m(t) &= E\{x(t)\} = \nu\mu, \quad \forall t \\ C(t, s) &= E\{[x(t) - m(t)][x(s) - m(s)]\} \\ &= \nu\mu e^{-(t-s)/\mu}, \quad \forall t, s \geq 0 \end{aligned}$$

求  $E\{\bar{x}\}$  和  $\text{var}(\bar{x})$ .

**题 1.5** 令谐波 (正弦波) 信号

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi)$$

式中, 频率  $\omega_0$  为一固定的实数, 而相位  $\phi$  是一在  $[0, 2\pi]$  内均匀分布的随机数. 考察以下两种情况:

- (1) 幅值  $A$  为一固定的正实数;
- (2) 幅值  $A$  为一 Rayleigh 分布的随机变量, 它与  $\phi$  统计独立, 即其分布为

$$f_A(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-a^2/(2\sigma^2)}, \quad a > 0$$

试问谐波信号在两种情况下是广义平稳的吗?

**题 1.6** 证明广义平稳随机过程  $x(t)$  的自协方差函数的下列性质:

$$\begin{aligned} C_{xx}^*(\tau) &= C_{xx}(-\tau) \\ |C_{xx}(\tau)| &\leq C_{xx}(0) \end{aligned}$$

**题 1.7** 证明两个广义平稳随机过程的互相关函数和互协方差函数的下列性质:

$$\begin{aligned} C_{xy}^*(\tau) &= C_{yx}(-\tau) \\ R_{xy}^*(\tau) &= R_{yx}(-\tau) \\ |R_{xy}(\tau)|^2 &\leq R_{xx}(0)R_{yy}(0) \end{aligned}$$

**题 1.8** 考虑两个谐波信号  $x(t)$  和  $y(t)$ , 其中

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_c t + \phi) \\ y(t) &= B \cos(\omega_c t) \end{aligned}$$

式中  $A$  和  $\omega_c$  为正的常数;  $\phi$  为均匀分布的随机变量, 其概率密度函数为

$$f_{\phi}(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

而  $B$  是一个具有零均值和单位方差的标准高斯随机变量, 即其分布函数为

$$f_B(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-b^2/2), \quad -\infty < b < \infty$$

(1) 求  $x(t)$  的均值  $\mu_x(t)$ 、方差  $\sigma_x^2(t)$ 、自相关函数  $R_x(\tau)$  和自协方差函数  $C_x(\tau)$ 。

(2) 若  $\phi$  与  $B$  为相互统计独立的随机变量, 求  $x(t)$  和  $y(t)$  的互相关函数  $R_{xy}(\tau)$  与互协方差函数  $C_{xy}(\tau)$ 。

**题 1.9** 令随机信号  $z(t)$  是另外两个随机信号  $x(t)$  和  $y(t)$  之和, 即

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

并且  $x(t)$  和  $y(t)$  都具有零均值。求随机信号  $z(t)$  的协方差函数  $C_z(\tau)$ 。

**题 1.10** 令

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)$$

式中  $\phi$  是在  $[-\pi, \pi]$  内均匀分布的随机变量, 即

$$f_{\phi}(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$n(t)$  是一个零均值的平稳高斯噪声, 其功率谱密度为

$$P_n(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & |f - f_c| \leq B/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

并且  $\phi$  与  $n(t)$  独立。现在将  $x(t)$  作为一“平方律装置”的输入, 得到输出

$$y(t) = x^2(t)$$

求输出信号  $y(t)$  的均值与自相关函数。

提示: 零均值的高斯随机过程的三阶矩恒等于零, 即

$$E\{n(t)n^2(t-\tau)\} = E\{n^2(t)n(t-\tau)\} = 0, \quad \forall \tau$$

**题 1.11** 令

$$x(t) = A[1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t + \phi) + v(t)$$

式中  $m(t)$  是一高斯随机过程, 其均值为零, 协方差函数为

$$C_m(\tau) = R_m(\tau) = \frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2}$$

而  $\phi$  服从均匀分布, 即

$$f(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi < \phi < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

加性噪声  $v(t)$  是一零均值的高斯过程, 其相关函数为

$$R_v(\tau) = N_0 B \frac{\sin(B\tau/2)}{B\tau/2} \cos(2\pi f_c \tau)$$

若三个随机过程  $m(t)$ ,  $\phi$  和  $v(t)$  统计独立, 并将  $x(t)$  用作平方律装置的输入, 求输出  $y(t) = x^2(t)$  的均值  $E\{y(t)\}$  和相关函数  $E\{y(t)y(t+\tau)\}$ .

**题 1.12** 随机信号  $x(t)$  具有零均值和功率谱密度

$$P_x(f) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{B}, & -\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中  $\sigma^2 > 0$ . 求该信号的自相关函数和功率.

**题 1.13** 已知  $x(t)$  和  $y(t)$  是两个零均值的平稳随机过程, 且  $z(t) = x(t) + y(t)$ .

(1) 若  $x(t)$  和  $y(t)$  相互独立, 并且它们的自相关函数分别为

$$R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad \text{和} \quad R_y(\tau) = \beta\delta(\tau)$$

求  $z(t)$  的功率谱密度.

(2) 令

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

式中  $\phi$  是在  $[-\pi, \pi]$  内均匀分布的随机数, 且  $R_y(\tau) = \beta\delta(\tau)$ . 求  $z(t)$  的功率谱密度.

**题 1.14** 令  $x(t)$  是一可微分的平稳随机过程, 其功率谱密度为  $P_x(f)$ . 若

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

求  $y(t)$  的功率谱密度.

**题 1.15** 令  $x(t)$  是一平稳过程, 其均值为  $m$ , 自相关函数为

$$R_x(\tau) = \alpha\delta(\tau)$$

若

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^T x(u)du, \quad 0 \leq t \leq T$$

求  $y(t)$  的均值、自相关函数和方差。

**题 1.16** 假定  $x(t)$  是一个平稳的高斯随机过程, 其均值为  $m$ , 方差为  $\sigma^2$ . 令

$$y(t) = x(t) - x(t - D), \quad D > 0$$

且  $x(t)$  的自相关函数为

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(2\pi f_0 \tau)}{2\pi f_0 \tau}$$

求  $y(t)$  的自相关函数和功率谱密度。

**题 1.17** 令

$$y(t) = x(t - D) + v(t)$$

为接收信号, 式中  $D$  表示信号  $x(t)$  的传播延时。已知  $x(t)$  和  $v(t)$  是相互独立的零均值平稳随机过程, 且它们的自相关函数为

$$R_x(\tau) = Ae^{-\beta|\tau|}$$

$$R_v(\tau) = B\delta(\tau)$$

求互相关函数  $R_{yx}(\tau)$  和  $R_{xy}(\tau)$  以及它们的互功率谱密度  $P_{xy}(f)$ 。

**题 1.18** 令线性系统的输出由下式给出:

$$y(t) = \int_0^\infty h(u)x(t-u)du + v(t), \quad 0 \leq t \leq \infty$$

其中  $v(t)$  是一平稳随机噪声, 它与输入信号  $x(t)$  统计不相关, 即

$$E\{v(t)x(t-\tau)\} = 0, \quad \forall \tau$$

证明系统的传递函数为

$$H(f) = \frac{P_{xy}^*(f)}{P_{xx}(f)}$$

式中  $P_{xx}(f)$  代表  $x(t)$  的功率谱密度,  $P_{xy}(f)$  表示  $x(t)$  和  $y(t)$  的互功率谱密度。

**题 1.19** 令  $x(t)$  和  $y(t)$  是两个零均值的随机信号, 并且

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

分别是  $x(t)$  和  $y(t)$  的 Fourier 变换, 证明互功率谱密度

$$P_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)$$

**题 1.20** 令两个基站接收单个信号源的接收信号为

$$y_j(t) = x_j(t) + v_j(t), \quad j = 1, 2$$

假设对于所有  $\tau$ , 以下条件成立:

$$E\{x_i(t)v_j(t+\tau)\} = 0, \quad i, j = 1, 2$$

$$E\{v_i(t)v_j(t+\tau)\} = 0, \quad i, j = 1, 2, \text{且 } i \neq j$$

并且  $x_i(t)$  和  $v_i(t), i = 1, 2$  都具有零均值.

定义相干函数

$$C_{12}(f) = \frac{P_{y_1, y_2}(f)}{\sqrt{P_{y_1, y_1}(f)P_{y_2, y_2}(f)}}$$

式中  $P_{y_i, y_j}(f)$  是  $y_i(t)$  和  $y_j(t)$  的功率谱密度. 证明

$$C_{12}(f) = \frac{\alpha_1(f)\alpha_2(f)}{\sqrt{[1 + \alpha_1^2(f)][1 + \alpha_2^2(f)]}}$$

式中

$$\alpha_i(f) = \sqrt{\frac{P_{x_i, x_i}(f)}{P_{v_i, v_i}(f)}}, \quad i = 1, 2$$

**题 1.21** 已知随机变量  $x$  和  $y$  的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \alpha \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}$$

式中  $r$  代表随机变量  $x$  和  $y$  之间的相关系数, 即

$$r = \frac{E\{(x-\mu_x)(y-\mu_y)\}}{\sigma_x\sigma_y}$$

证明以下结果:

(1)  $x$  和  $y$  的边缘概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

即  $x$  和  $y$  分别是正态或高斯随机变量。

(2) 若正态随机变量  $x$  和  $y$  不相关, 则它们统计独立。

**题 1.22** 令

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$$

证明系统稳定的条件: 冲激响应是绝对可积分函数, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

**题 1.23** 线性独立的多项式序列  $\{f_i(x)\}$  由三个多项式函数  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = x^2$  组成, 并且  $x$  在区间  $[-1, 1]$  取值。

(1) 用 Gram-Schmidt 标准正交化算法

$$\phi_k = \frac{f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k, \phi_i \rangle \phi_i}{\left\| f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k, \phi_i \rangle \phi_i \right\|}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

将  $\{f_i(x)\}$  变成正交序列  $\{\phi_i(x)\}$ ,

(2) 用 Gram-Schmidt 标准正交化矩阵范数算法

$$d_k = \begin{vmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_1, f_k \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_2, f_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle f_{k-1}, f_1 \rangle & \langle f_{k-1}, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_{k-1}, f_{k-1} \rangle \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_k \end{vmatrix}$$

$$\phi_k = \frac{d_k}{\langle d_k, d_k \rangle^{1/2}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

将  $\{f_i(x)\}$  变成序列  $\{\phi_i(x)\}$ , 并检验序列  $\{\phi_i(x)\}$  的标准正交性。

**题 1.24** 使用有限项级数展开

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(t)$$

逼近连续时间信号  $x(t)$ 。假定连续时间的基函数  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)$  为已知, 试求展开系数  $c_1, c_2, \dots, c_m$ 。

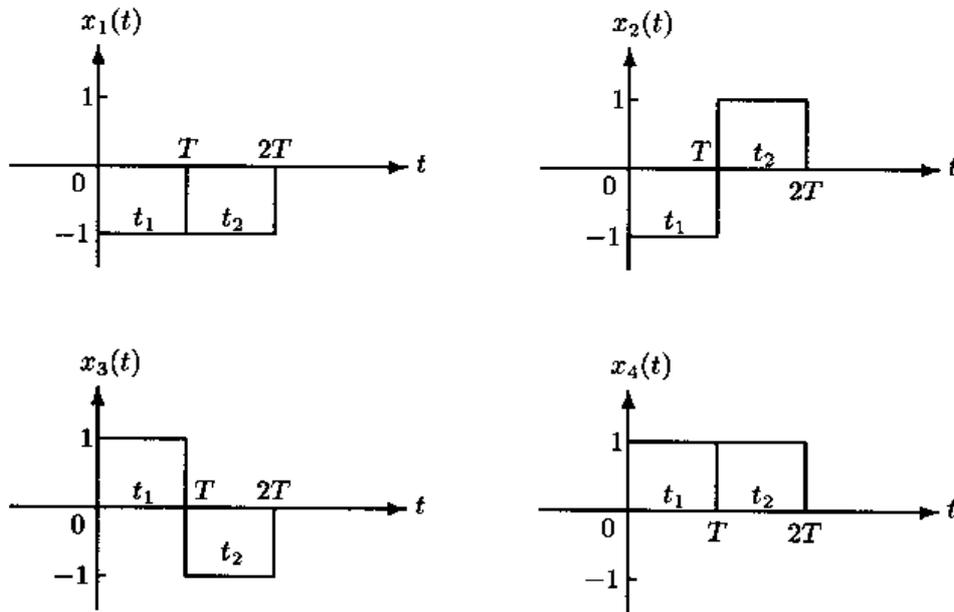
**题 1.25** 使用有限项级数展开

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(n)$$

逼近离散时间信号  $x(t)$ 。假定离散时间的基函数  $\phi_1(t_k), \phi_2(t_k), \dots, \phi_m(t_k)$  为已知, 其中  $k = 1, 2, \dots, N$ , 试求展开系数  $c_1, c_2, \dots, c_m$ 。

### 1.3 习题解答

**题 1.1** 由  $x(t)$  的定义式易知, 两个相邻的信号  $x(t_1) = x_1$  和  $x(t_2) = x_2$  有四种可能的取值, 它们是  $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$ , 如图题 1.1 所示。



图题 1.1 基带信号的四四种可能取值

在四种可能取值  $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$  的样本空间内的联合概率分布为

$$P[x_1 = -1, x_2 = -1] = (1 - p)^2$$

$$P[x_1 = -1, x_2 = 1] = (1 - p)p$$

$$P[x_1 = 1, x_2 = -1] = p(1 - p)$$

$$P[x_1 = 1, x_2 = 1] = p^2$$

引入  $\delta$  函数

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则  $x = (x_1, x_2)$  的联合概率密度由下式给出:

$$f(x_1, x_2) = (1-p)^2 \delta(x_1 + 1) \delta(x_2 + 1) + p(1-p) \delta(x_1 + 1) \delta(x_2 - 1) + \\ p(1-p) \delta(x_1 - 1) \delta(x_2 + 1) + p^2 \delta(x_1 - 1) \delta(x_2 - 1)$$

容易验证

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = (1-p)^2 + (1-p)p + p(1-p) + p^2 \\ = 1$$

**答案:**  $x = (x_1, x_2)$  的概率密度函数为

$$f(x_1, x_2) = (1-p)^2 \delta(x_1 + 1) \delta(x_2 + 1) + p(1-p) \delta(x_1 + 1) \delta(x_2 - 1) + \\ p(1-p) \delta(x_1 - 1) \delta(x_2 + 1) + p^2 \delta(x_1 - 1) \delta(x_2 - 1)$$

**题 1.2** 与题 1.1 具有相同的解.

**题 1.3** 经计算, 得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \cos(\alpha t) \right|^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{\sin[\alpha(t+h)] - \sin(\alpha t) - \alpha h \cos(\alpha t)}{h} \right|^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{\sin(\alpha t) \cos(\alpha h) + \cos(\alpha t) \sin(\alpha h) - \sin(\alpha t) - \alpha h \cos(\alpha t)}{h} \right|^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{\sin(\alpha t)[\cos(\alpha h) - 1] + \cos(\alpha t)[\sin(\alpha h) - \alpha h]}{h} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{题 1.3.1})$$

对  $\sin(\alpha h)$  和  $\cos(\alpha h)$  作 Taylor 级数展开, 有

$$\begin{aligned} \sin(\alpha h) &= \alpha h - \frac{\alpha^3 h^3}{3!} + \text{高阶项} \\ \cos(\alpha h) &= 1 + \frac{\alpha^2 h^2}{2!} + \frac{\alpha^4 h^4}{4!} + \text{高阶项} \end{aligned}$$

将这些级数展开代入式 (题 1.3.1), 并忽略高阶项, 则有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \cos(\alpha t) \right|^2 \right\} \\ & \leq 2\mathbb{E} \left\{ \left| \frac{\sin^2(\alpha t) \left( \frac{\alpha^2 h^2}{2} + \dots \right)^2}{h^2} \right| \right\} + 2\mathbb{E} \left\{ \left| \frac{\cos^2(\alpha t) (\alpha^3 h^3 - \dots)^2}{h^2 \cdot 3!} \right| \right\} \\ & \leq 4h^2 \mathbb{E}\{|\alpha|^4\} \end{aligned}$$

当  $h \rightarrow 0$  时, 上式变为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \cos(\alpha t) \right|^2 \right\} = 0 \quad (\text{题 1.3.2})$$

但由于

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

故式 (题 1.3.2) 直接给出结果

$$m_{x'} = \mathbb{E} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \cos(\alpha t)$$

**答案:** 随机变量  $x$  导数的均值为  $m_{x'} = \cos(\alpha t)$ .

**题 1.4** 计算  $\mathbb{E}\{\bar{x}\}$ , 得

$$\mathbb{E}\{\bar{x}\} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}\{x(t)\} dt$$

这里互换了数学期望与积分的顺序. 将  $\mathbb{E}\{x(t)\} = \nu\mu$  代入上式, 有

$$\mathbb{E}\{\bar{x}\} = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \nu\mu dt = \nu\mu \quad (\text{题 1.4.1})$$

另一方面,

$$\bar{x}^2 = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right]^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T x(t)x(s) dt ds$$

由此得

$$\begin{aligned} E\{\bar{x}^2\} &= \frac{1}{T^2} E\left\{ \int_0^T \int_0^T x(t)x(s) dt ds \right\} \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E\{x(t)x(s)\} dt ds \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{x}) &= E\{\bar{x}^2\} - (E\{\bar{x}\})^2 \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E\{x(t)x(s)\} dt ds - \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T m(t)m(s) dt ds \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E\{[x(t) - m(t)][x(s) - m(s)]\} dt ds \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T C(t, s) dt ds \end{aligned} \quad (\text{题 1.4.2})$$

由于实信号的协方差函数是对称的, 即  $C(t, s) = C(s, t)$ , 故

$$\text{var}(\bar{x}) = \frac{1}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T C(t, s) ds = \frac{\nu\mu}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T e^{-(t-s)/\mu} ds$$

在得到第二个等式的时候, 使用了已知的  $C(t, s)$ 。计算上式的积分, 则有

$$\text{var}(\bar{x}) = \frac{\nu\mu^2}{T} - \frac{\nu\mu^3}{T^2} (1 - e^{-T/\mu}) \quad (\text{题 1.4.3})$$

**答案:** 随机变量  $x$  的样本均值的期望值和方差分别为

$$E\{\bar{x}\} = \nu\mu$$

和

$$\text{var}(\bar{x}) = \frac{\nu\mu^2}{T} - \frac{\nu\mu^3}{T^2} (1 - e^{-T/\mu})$$

**题 1.5** 首先, 将谐波信号等价写作

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \phi \cos(\omega_0 t) + A \sin \phi \sin(\omega_0 t) \\ &= A_I \cos(\omega_0 t) + A_Q \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (\text{题 1.5.1})$$

式中  $A_I = A \cos \phi$  和  $A_Q = A \sin \phi$  分别称为谐波信号  $x(t)$  的同相分量和正交分量。注意, 只有  $A_I$  和  $A_Q$  是随机变量, 而  $\cos(\omega_0 t)$  和  $\sin(\omega_0 t)$  均为确定性变量。

然后求谐波信号  $x(t)$  的均值和协方差函数。对于情况 (1), 由于  $A$  为固定的正实数, 故由式 (题 1.5.1) 有

$$\begin{aligned} E\{x(t)\} &= E\{A_I\} \cos(\omega_0 t) + E\{A_Q\} \sin(\omega_0 t) \\ &= AE\{\cos \phi\} \cos(\omega_0 t) + AE\{\sin \phi\} \sin(\omega_0 t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中  $\phi$  是在  $[0, 2\pi]$  内均匀分布的随机变量。式中使用了熟知的结果  $E\{\cos \phi\} = 0$  和  $E\{\sin \phi\} = 0$ 。

类似地, 对于情况 (2), 由于  $A$  是一个均值为零的 Rayleigh 分布, 它与另一个随机变量  $\phi$  统计独立, 故由式 (题 1.5.1) 得

$$\begin{aligned} E\{x(t)\} &= E\{A\}E\{\cos \phi\} \cos(\omega_0 t) + E\{A\}E\{\sin \phi\} \sin(\omega_0 t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

式中利用了结果  $E\{\cos \phi\} = 0$  和  $E\{\sin \phi\} = 0$ 。

由于谐波信号  $x(t)$  在两种情况下都是零均值的, 所以它的相关函数与协方差函数相等, 且协方差函数由下式给出:

$$\begin{aligned} R_x(k) &= E\{A^2 \cos(\omega_0 t - \phi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 k - \phi)\} \\ &= \frac{1}{2} E\{A^2 \cos(2\omega_0 t + \omega_0 k - 2\phi) + A^2 \cos(\omega_0 k)\} \\ &= \frac{1}{2} E\{A^2\} \cos(\omega_0 k) \end{aligned} \quad (\text{题 1.5.2})$$

式中使用了结果  $E\{\cos(2\omega_0 t + \omega_0 k - 2\phi)\} = 0$ , 其中  $\phi$  是在  $[0, 2\pi]$  内均匀分布的随机变量。

由于在情况 (1) 下  $E\{A^2\} = A^2$ , 在情况 (2) 下  $E\{A^2\} = 2\sigma^2$ , 故式 (题 1.5.2) 给出以下结果: 在情况 (1) 下  $R_x(k) = \frac{1}{2} A^2 \cos(\omega_0 k)$ , 在情况 (2) 下  $R_x(k) = \sigma^2 \cos(\omega_0 k)$ 。

**答案:** 由于均值和相关函数均与时间  $t$  无关, 故谐波信号在情况 (1) 和 (2) 下都是广义平稳的随机过程。

**题 1.6** 令  $\mu$  是广义平稳随机过程  $x(t)$  的均值, 则

$$\begin{aligned} C_{xx}^*(\tau) &= [E\{x(t)x^*(t-\tau)\}]^* \\ &= E\{x(t-\tau)x^*(t)\} \\ &= C_{xx}(-\tau) \end{aligned}$$

这就是本题需要证明的第一个关系式。

由于自协方差函数是功率谱密度的 Fourier 反变换, 故有

$$|C_{xx}(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |P_{xx}(f)| |e^{j2\pi f\tau}| df$$

由于功率谱密度是非负的, 即  $P_{xx}(f) \geq 0$ , 所以上式可以写作

$$|C_{xx}(\tau)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) df = C_{xx}(0)$$

这就证明了本题第二个需要证明的关系式。

**题 1.7** 由互协方差函数定义, 易知

$$\begin{aligned} C_{xy}^*(\tau) &= (\mathbf{E}\{[x(t) - \mu_x][y(t - \tau) - \mu_y]^*\})^* \\ &= \mathbf{E}\{[x(t) - \mu_x]^*[y(t - \tau) - \mu_y]\} \\ &= \mathbf{E}\{[y(u) - \mu_y][x(u + \tau) - \mu_x]^*\} \\ &= C_{yx}(-\tau) \end{aligned}$$

这就是本题第一个需要证明的公式。

类似地, 我们有

$$\begin{aligned} R_{xy}^*(\tau) &= (\mathbf{E}\{x(t)y^*(t - \tau)\})^* \\ &= \mathbf{E}\{x^*(t)y(t - \tau)\} \\ &= \mathbf{E}\{y(u)x^*(u + \tau)\} \\ &= R_{yx}(-\tau) \end{aligned}$$

即本题第二个关系式得证。

由互相关函数和互协方差函数的关系知

$$R_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau) + \mu_x \mu_y^*$$

平方后, 得

$$R_{xy}^2(\tau) = C_{xy}^2(\tau) + 2\mu_x \mu_y^* C_{xy}(\tau) + \mu_x^2 \mu_y^{*2}$$

从而有

$$|R_{xy}|^2 \leq |C_{xy}(\tau)|^2 + 2|\mu_x \mu_y^*| \cdot |C_{xy}(\tau)| + |\mu_x|^2 |\mu_y|^2$$

但是, 由于

$$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(0)C_{yy}(0)$$

所以

$$\begin{aligned}
 |R_{xy}(\tau)|^2 &\leq C_{xx}(0)C_{yy}(0) + |\mu_x|^2|\mu_y^*|^2 + 2|\mu_x\mu_y|\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)} \\
 &\leq C_{xx}(0)C_{yy}(0) + |\mu_x|^2|\mu_y|^2 + |\mu_x|^2C_{xx}(0) + |\mu_y|^2C_{yy}(0) \\
 &= [C_{xx}(0) + |\mu_x|^2][C_{yy}(0) + |\mu_y|^2] \\
 &= R_{xx}(0)R_{yy}(0)
 \end{aligned}$$

这就是本题需要证明的第三个关系式。证毕。

**题 1.8** 注意谐波信号  $x(t)$  是关于随机相位  $\phi$  的随机过程，因此其数学期望是相对于  $\phi$  的数学期望，即  $E\{x(t)\} = E_\phi\{x(t)\}$ 。

(1) 谐波信号  $x(t)$  的均值为

$$\begin{aligned}
 \mu_x &= E_\phi\{x(t)\} \\
 &= E_\phi\{A \cos(\omega_c t + \phi)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \cos(\omega_c t + \phi) d\phi \\
 &= \frac{A \cos(\omega_c t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi - \frac{A \sin(\omega_c t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \\
 &= \frac{A \cos(\omega_c t)}{2\pi} \sin \phi \Big|_0^{2\pi} - \frac{A \sin(\omega_c t)}{2\pi} \cos \phi \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

由于谐波信号  $x(t)$  的均值等于零，故其方差直接等于二阶矩，即有

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 &= E_\phi\{x^2(t)\} \\
 &= E\{A^2 \cos^2(\omega_c t + \phi)\} \\
 &= A^2 \frac{1}{2} E\{1 + \cos(2\omega_c t + 2\phi)\} \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\omega_c t + 2\phi)\} \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\omega_c t + 2\phi) d\phi \\
 &= \frac{A^2}{2}
 \end{aligned}$$

即谐波信号的方差为  $A^2/2$ 。

谐波信号  $x(t)$  的自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= E\{A \cos(\omega_c t + \phi) A \cos(\omega_c t - \omega_c \tau + \phi)\} \\
 &= A^2 E\{\cos(\omega_c t + \phi) \cos(\omega_c t - \omega_c \tau + \phi)\} \\
 &= \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\omega_c t - \omega_c \tau + 2\phi) + \cos(\omega_c \tau)\} \\
 &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_c \tau) + \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\omega_c t - \omega_c \tau + 2\phi)\}
 \end{aligned}$$

式中右边第二项等于零, 故

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_c \tau)$$

由于  $x(t)$  的均值等于零, 故其自协方差函数与自相关函数等价, 即有

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_c \tau)$$

(2) 为了求出  $x(t)$  与  $y(t)$  的互相关函数, 有必要先求出  $y(t)$  的均值。注意到在  $y(t)$  的表达式中只有幅值  $B$  为随机变量, 故有

$$\begin{aligned}
 \mu_y(t) &= E_B\{y(t)\} \\
 &= E_B\{B \cos(\omega_c t)\} \\
 &= E\{B\} \cos(\omega_c t)
 \end{aligned}$$

式中  $E_B$  表示对随机变量  $B$  求数学期望。

由于  $B$  是一个标准高斯随机变量, 其均值  $E\{B\} = 0$ , 故

$$\mu_y(t) = 0$$

由于  $\phi$  与  $B$  独立, 故有

$$\begin{aligned}
 R_{xy}(\tau) &= E\{A \cos(\omega_c t + \phi) B \cos(\omega_c t - \omega_c \tau)\} \\
 &= E\{A \cos(\omega_c t + \phi)\} E\{B \cos(\omega_c t - \omega_c \tau)\} \\
 &= A E\{\cos(\omega_c t + \phi)\} E\{B\} \cos(\omega_c t - \omega_c \tau) \\
 &= A \times 0 + 0 \times \cos(\omega_c t - \omega_c \tau) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

又由于  $x(t)$  和  $y(t)$  的均值都等于零, 故有

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) \equiv 0$$

**答案:** 谐波信号  $x(t)$  与  $y(t)$  是不相关的两个随机过程.

**题 1.9** 由于  $\mu_x = \mu_y = 0$ , 故  $\mu_z = \mu_x + \mu_y = 0$ , 从而  $z(t)$  的自协方差函数与自相关函数相同, 即  $C_z(\tau) = R_z(\tau)$ .

由自相关函数定义知

$$\begin{aligned} C_z(\tau) &= R_z(\tau) = E\{z(t)z^*(t-\tau)\} \\ &= E\{(x(t) + y(t))[x(t-\tau) + y(t-\tau)]^*\} \\ &= E\{x(t)x^*(t-\tau)\} + E\{x(t)y^*(t-\tau)\} + E\{y(t)x^*(t-\tau)\} + E\{y(t)y^*(t-\tau)\} \\ &= R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau) \end{aligned}$$

**答案:** 随机信号  $z(t) = x(t) + y(t)$  的协方差函数为

$$C_z(\tau) = R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau)$$

**题 1.10** 首先, 对服从题给均匀分布的相角  $\phi$  和任意整数  $k$ , 有

$$\begin{aligned} E\{\cos(k\phi)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sin \phi' \Big|_{\phi'=-k\pi}^{k\pi} = 0 \\ E\{\sin(k\phi)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \left[ -\cos \phi' \Big|_{\phi'=-k\pi}^{k\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

于是, 对于任意整数  $m$  和  $k$ , 易知

$$\begin{aligned} E\{\cos(m\pi f_c t + k\phi)\} &= \cos(m\pi f_c t) E\{\cos(k\phi)\} - \sin(m\pi f_c t) E\{\sin(k\phi)\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.1})$$

(1) 计算  $y(t)$  的均值, 得

$$\begin{aligned} E\{y(t)\} &= E\{[A \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)]^2\} \\ &= E\{A^2 \cos^2(2\pi f_c t + \phi) + \\ &\quad 2E\{A \cos(2\pi f_c t + \phi)\} E\{n(t)\} + E\{n^2(t)\}\} \\ &= \frac{A^2}{2} E\{[1 + \cos(4\pi f_c t + 2\phi)]\} + R_n(0) \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.2})$$

式中利用了  $E\{n(t)\} = 0$  这一已知条件。加性噪声  $n(t)$  的协方差为

$$\begin{aligned} c_n(\tau) &= R_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{f_c - \frac{B}{2}}^{f_c + \frac{B}{2}} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{N_0 B \sin(B\tau\pi)}{(B\tau\pi)} \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.3})$$

当  $\tau \rightarrow 0$  时, 式 (题 1.10.3) 给出结果

$$R_n(0) = N_0 B \quad (\text{题 1.10.4})$$

将式 (题 1.10.3) 和式 (题 1.10.4) 代入式 (题 1.10.2), 即得到输出  $y(t)$  的均值为

$$E\{y(t)\} = \frac{A}{2} + N_0 B$$

(2) 输出信号  $y(t)$  的自相关函数为

$$E\{y(t)y(t-\tau)\} = E\{[A \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)]^2 [A \cos(2\pi f_c(t-\tau) + \phi) + n(t-\tau)]^2\}$$

具体计算之, 得

$$\begin{aligned} E\{y(t)y(t-\tau)\} &= E\{A^4 \cos^2(2\pi f_c t + \phi) \cos^2[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} + \\ &E\{2A \cos(2\pi f_c t + \phi) A^2 \cos^2[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} E\{n(t)\} + \\ &E\{A^2 \cos^2[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} E\{n^2(t)\} + \\ &E\{2A^2 \cos^2(2\pi f_c t + \phi) A \cos[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} E\{n(t-\tau)\} + \\ &E\{4A^2 \cos(2\pi f_c t + \phi) \cos[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} E\{n(t)n(t-\tau)\} + \\ &E\{2A \cos^2[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} E\{n(t-\tau)n^2(t)\} + \\ &E\{A^2 \cos^2(2\pi f_c t + \phi)\} E\{n^2(t-\tau)\} + \\ &E\{2A \cos(2\pi f_c t + \phi)\} E\{n(t)n^2(t-\tau)\} + \\ &E\{n^2(t)n^2(t-\tau)\} \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.5})$$

式中利用了  $\phi$  与  $n(t)$  独立的已知条件。

注意到

$$E\{n(t)\} = 0$$

和

$$E\{A \cos(2\pi f_c t + \phi)\} = 0$$

又由于  $n(t)$  是零均值的高斯随机过程, 其三阶矩等于零, 即

$$E\{n(t)n^2(t-\tau)\} = 0, \quad \forall \tau \quad (\text{题 1.10.6})$$

$$E\{n^2(t)n(t-\tau)\} = 0, \quad \forall \tau \quad (\text{题 1.10.7})$$

由式 (题 1.10.5) ~ 式 (题 1.10.7), 可以得到

$$\begin{aligned} E\{y(t)y(t-\tau)\} &= E\{A^4 \cos^2(2\pi f_c t + \phi) \cos^2[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} + \\ &E\{A^2 \cos^2[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} E\{n^2(t)\} + \\ &E\{4A^2 \cos(2\pi f_c t + \phi) \cos[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} \times \\ &E\{n(t)n(t-\tau)\} + \\ &E\{A^2 \cos^2(2\pi f_c t + \phi)\} E\{n^2(t-\tau)\} + \\ &E\{n^2(t)n^2(t-\tau)\} \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.8})$$

利用式 (题 1.10.3) 和式 (题 1.10.4), 易知

$$E\{n^2(t)\} = R_n(0) = N_0 B \quad (\text{题 1.10.9a})$$

$$E\{n^2(t-\tau)\} = R_n(0) = N_0 B \quad (\text{题 1.10.9b})$$

$$E\{n(t)n(t-\tau)\} = R_n(\tau) = \frac{N_0 B \sin(B\tau\pi)}{(B\tau\pi)} \cos(2\pi f_c \tau) \quad (\text{题 1.10.9c})$$

和

$$\begin{aligned} E\{n^2(t)n^2(t-\tau)\} &= R_n^2(0) + R_n^2(\tau) \\ &= N_0^2 B^2 + \frac{N_0^2 B^2 \sin^2(B\tau\pi)}{(B^2 \tau^2 \pi^2)} \cos^2(2\pi f_c \tau) \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.9d})$$

利用式 (题 1.10.1) 得

$$\begin{aligned} &E\{4A^2 \cos(2\pi f_c t + \phi) \cos[2\pi f_c(t-\tau) + \phi]\} \\ &= 2A^2 E\{\cos[2\pi f_c(2t-\tau) + 2\phi] + \cos(2\pi f_c \tau)\} \\ &= 2A^2 \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.10a})$$

和

$$\begin{aligned} E\{A^2 \cos^2(2\pi f_c t + \phi)\} &= \frac{A^2}{2} E\{1 + \cos(4\pi f_c t + 2\phi)\} \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} E\{\cos(4\pi f_c t + \phi)\} \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.10b})$$

类似地,

$$E\{A^2 \cos^2[2\pi f_c(t - \tau) + \phi]\} = \frac{A^2}{2} \quad (\text{题 1.10.10c})$$

另有

$$\begin{aligned} &E\{A^4 \cos^2(2\pi f_c t + \phi) \cos^2[2\pi f_c(t - \tau) + \phi]\} \\ &= \frac{A^4}{4} E\{[\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\phi)]^2\} \\ &= \frac{A^4}{4} [\cos^2(2\pi f_c \tau) + 2 \cos(2\pi f_c \tau) E\{\cos(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\phi)\} + \\ &\quad E\{\cos^2(4\pi f_c - 2\pi f_c \tau + 2\phi)\}] \\ &= \frac{A^4}{4} \left[ \cos^2(2\pi f_c \tau) + 0 + \frac{1}{2} E\{[1 + \cos(8\pi f_c t - 4\pi f_c \tau + 4\phi)]\} \right] \\ &= \frac{A^4}{4} \left[ \cos^2(2\pi f_c \tau) + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{题 1.10.10d})$$

将式 (题 1.10.9) 和式 (题 1.10.10) 一起代入式 (题 1.10.8), 即可得到  $y(t)$  的自相关函数如下:

$$\begin{aligned} E\{y(t)y(t - \tau)\} &= \frac{A^2}{4} \left[ \cos^2(2\pi f_c \tau) + \frac{1}{2} \right] + \frac{A^2}{2} N_0 B + \\ &\quad 2A^2 \cos(2\pi f_c \tau) \frac{N_0 B \sin(B\tau\pi)}{B\tau\pi} \cos(2\pi f_c \tau) + \frac{A^2}{2} N_0 B + \\ &\quad N_0^2 B^2 + \frac{N_0^2 B^2 \sin^2(B\tau\pi)}{(B\tau\pi)^2} \cos(2\pi f_c \tau) \\ &= \frac{A^2}{4} \left[ \cos^2(2\pi f_c \tau) + \frac{1}{2} \right] + A^2 N_0 B + \\ &\quad N_0^2 B^2 \left\{ 1 + \frac{\sin(B\tau\pi)}{B\tau\pi} \cos(2\pi f_c \tau) \left[ \frac{A^2}{N_0 B} \cos(2\pi f_c \tau) + \frac{\sin(B\tau\pi)}{B\tau\pi} \right] \right\} \end{aligned}$$

答案:  $y(t)$  的自相关函数为

$$E\{y(t)y(t-\tau)\} = \frac{A^2}{4} \left[ \cos^2(2\pi f_c \tau) + \frac{1}{2} \right] + A^2 N_0 B + N_0^2 B^2 \left\{ 1 + \frac{\sin(B\tau\pi)}{B\tau\pi} \cos(2\pi f_c \tau) \left[ \frac{A^2}{N_0 B} \cos(2\pi f_c \tau) + \frac{\sin(B\tau\pi)}{B\tau\pi} \right] \right\}$$

题 1.11<sup>[28]</sup> 记  $s(t) = A[1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t + \phi)$ , 则由于  $m(t)$  与  $\phi$  相互统计独立, 并且  $E\{m(t)\} = 0$  和  $E\{\cos(2\pi f_c t + \phi)\} = 0$ , 故有

$$\begin{aligned} E\{s(t)\} &= A[1 + E\{m(t)\}] E\{\cos(2\pi f_c t + \phi)\} \\ &= A(1 + 0) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

求  $s(t)$  的相关函数, 得

$$\begin{aligned} E\{s(t)s(t+\tau)\} &= E\{A^2[1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t + \phi) \times \\ &\quad [1 + m(t+\tau)] \cos[2\pi f_c(t+\tau) + \phi]\} \\ &= A^2 E\{[1 + m(t)][1 + m(t+\tau)]\} \times \\ &\quad E\{\cos(2\pi f_c t + \phi) \cos[2\pi f_c(t+\tau) + \phi]\} \\ &= A^2 [1 + E\{m(t)m(t+\tau)\}] \times \frac{1}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) [1 + R_m(\tau)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) [1 + \sin(\tau/2)/(\tau/2)] \quad (\text{题 1.11.1}) \end{aligned}$$

注意到零均值高斯过程的奇次阶矩等于零, 又有

$$E\{s^2(t)\} = E\{s^2(t+\tau)\} = \frac{A^2}{2} \quad (\text{题 1.11.2})$$

和

$$\begin{aligned} &E\{s^2(t)s^2(t+\tau)\} \\ &= A^4 E\{\cos^2(2\pi f_c t + \phi) \cos^2[2\pi f_c(t+\tau) + \phi]\} E\{[1 + m(t)]^2 [1 + m(t+\tau)]^2\} \\ &= A^4 \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cos(4\pi f_c \tau) \right] [1 + 2R_m(0) + 4R_m(\tau) + 2R_m^2(\tau) + 2R_m(\tau)] \quad (\text{题 1.11.3}) \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} E\{\cos^2(2\pi f_c t + \phi)\} &= E\{\cos^2[2\pi f_c(t + \tau) + \phi]\} \\ E\{v^2(t + \tau)\} &= R_v(0) \\ E\{m(t)\} &= 0 \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} & E\{s^2(t)v^2(t + \tau)\} \\ &= E\{A^2[1 + m(t)]^2 \cos^2(2\pi f_c t + \phi)v^2(t + \tau)\} \\ &= A^2 E\{[1 + m(t)]^2\} E\{\cos^2(2\pi f_c t + \phi)\} E\{v^2(t + \tau)\} \\ &= \frac{A^2}{2} R_n(0)[1 + R_m(0)] \\ &= E\{s^2(t + \tau)v^2(t)\} \end{aligned} \quad (\text{题 1.11.4})$$

下面计算  $y(t)$  的自相关函数:

$$\begin{aligned} & E\{y(t)y(t + \tau)\} \\ &= E\{[s(t) + v(t)]^2[s(t + \tau) + v(t + \tau)]^2\} \\ &= E\{[s^2(t) + 2s(t)v(t) + v^2(t)] \times \\ &\quad [s^2(t + \tau) + 2s(t + \tau)v(t + \tau) + v^2(t + \tau)]\} \\ &= E\{s^2(t)s^2(t + \tau)\} + E\{v^2(t)v^2(t + \tau)\} + \\ &\quad 4E\{s(t)s(t + \tau)\}E\{v(t)v(t + \tau)\} + \\ &\quad E\{s^2(t)\}E\{v^2(t + \tau)\} + E\{s^2(t + \tau)\}E\{v^2(t)\} \end{aligned} \quad (\text{题 1.11.5})$$

由于

$$E\{v^2(t)\} = E\{v^2(t + \tau)\} = R_n(0) \quad (\text{题 1.11.6})$$

$$E\{v(t)v(t + \tau)\} = R_v(\tau) = N_0 B \frac{\sin(B\tau/2)}{B\tau/2} \cos(2\pi f_c \tau) \quad (\text{题 1.11.7})$$

因此, 当  $\tau \rightarrow 0$  时, 得

$$R_n(0) = N_0 B \quad (\text{题 1.11.8})$$

$$\begin{aligned} E\{v^2(t)v^2(t + \tau)\} &= R_n^2(0) + 2R_n^2(\tau) \\ &= (N_0 B)^2 + \frac{2[N_0 B \sin(B\tau/2) \cos(2\pi f_c \tau)]^2}{(B\tau/2)^2} \end{aligned} \quad (\text{题 1.11.9})$$

将式(题 1.11.1) ~ 式(题 1.11.4) 和式(题 1.11.6) ~ 式(题 1.11.9) 代入式(题 1.11.5), 则有

$$\begin{aligned} E\{y(t)y(t+\tau)\} &= [1 + 2R_m(0) + 4R_m(\tau) + 2R_m^2(\tau)] \frac{A^4}{8} [2 + \cos(4\pi f_c\tau)] \times \\ &\quad [1 + R_m(\tau)] + [R_n^2(0) + 2R_n^2(\tau)] + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c\tau) [1 + R_m(\tau)] + \\ &\quad A^2 R_n(0) [1 + R_m(0)] + A^2 R_n(0) \end{aligned} \quad (\text{题 1.11.10})$$

答案: 输出  $y(t) = x^2(t)$  的自相关函数如式(题 1.11.10) 所示, 式中

$$\begin{aligned} R_m(\tau) &= \frac{\sin(B\tau/2)}{B\tau/2} \\ R_n(\tau) &= N_0 B \frac{\sin(B\tau/2)}{B\tau/2} \cos(2\pi f_c\tau) \end{aligned}$$

**题 1.12** 由于随机信号  $x(t)$  的均值等于零, 因此自相关函数  $R_x(\tau)$  与自协方差函数  $C_x(\tau)$  相等, 即  $R_x(\tau) = C_x(\tau)$ .

利用自协方差函数与功率谱密度的 Fourier 变换对关系, 易知

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = C_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\sigma^2}{B} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{\sigma^2}{B} \int_{-B/2}^{B/2} e^{j2\pi f\tau} df = \frac{4\pi B\tau\sigma^2}{\sin(\pi B\tau)} \end{aligned}$$

于是, 信号的功率为

$$P = R_x(0) = 4\sigma^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\pi B\tau}{\sin(\pi B\tau)} = 4\sigma^2$$

答案: 信号功率等于  $4\sigma^2$ .

**题 1.13** (1) 由于  $x(t)$  和  $y(t)$  相互独立, 故  $z(t) = x(t) + y(t)$  的自相关函数

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E\{z(t)z^*(t-\tau)\} = E\{[x(t) + y(t)][x(t-\tau) + y(t-\tau)]^*\} \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} + \beta\delta(\tau) \end{aligned}$$

又由于  $x(t)$  的均值  $m_x$  和  $y(t)$  的均值  $m_y$  都等于零, 所以  $z(t)$  的均值  $m_z = m_x + m_y = 0$ . 于是,  $z(t)$  的自协方差函数和自相关函数相等, 即有

$$C_z(\tau) = R_z(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} + \beta\delta(\tau)$$

其 Fourier 变换给出  $z(t)$  的功率谱密度:

$$\begin{aligned}
 P_z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \beta\delta(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \beta \\
 &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f} + \beta \\
 &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} + \beta
 \end{aligned} \tag{题 1.13.1}$$

(2) 当  $x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi)$  时, 其相关函数

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= E\{A \cos(2\pi f_c t + \phi) A \cos[2\pi f_c(t - \tau) + \phi]\} \\
 &= \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_c \tau)
 \end{aligned}$$

于是

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_c \tau) + \beta\delta(\tau)$$

故

$$C_z(\tau) = R_z(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_c \tau) + \beta\delta(\tau)$$

此时,  $z(t)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned}
 P_z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_c \tau) + \beta\delta(\tau) \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} A^2 (e^{j2\pi f_c \tau} + e^{-j2\pi f_c \tau}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \beta\delta(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{4} A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_c)\tau} d\tau + \frac{1}{4} A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f+f_c)\tau} d\tau + \beta \\
 &= \frac{1}{4} A^2 \{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \} + \beta
 \end{aligned}$$

式中利用了 Fourier 积分变换对  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi f\tau} df = 1$  和  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \delta(f)$ .

**答案:**

(1)  $z(t)$  的功率谱密度

$$P_z(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} + \beta$$

(2)  $z(t)$  的功率谱密度

$$P_z(f) = \frac{1}{4}A^2 [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \beta$$

**题 1.14** 令  $x(t)$  的频谱为  $X(f)$ , 功率谱密度为  $P_x(f) = |X(f)|^2$ . 由已知条件得

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} dx(t) \\ &= e^{-j2\pi ft} x(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} x(t) de^{-j2\pi ft} \\ &= e^{-j2\pi ft} x(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= e^{-j2\pi ft} x(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - j2\pi f X(f) \end{aligned} \quad (\text{题 1.14.1})$$

由于  $x(t) \equiv 0, t < 0$  即  $x(-\infty) = 0$ , 并且  $e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=\infty} = 0$ , 故

$$e^{-j2\pi ft} x(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (\text{题 1.14.2})$$

将式 (题 1.14.2) 代入式 (题 1.14.1), 即可得到微分信号  $y(t) = dx(t)/dt$  的频谱为

$$Y(f) = -j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = -j2\pi f X(f) \quad (\text{题 1.14.3})$$

因此, 微分信号  $y(t)$  的功率谱密度由下式给出:

$$P_y(f) = |Y(f)|^2 = |-j2\pi f|^2 |X(f)|^2 = 4\pi^2 f^2 P_x(f) \quad (\text{题 1.14.4})$$

**答案:** 微分信号  $y(t) = dx(t)/dt$  的功率谱密度等于  $4\pi^2 f^2 P_x(f)$ .

**题 1.15** (1) 求  $y(t)$  的均值, 得

$$\begin{aligned} E\{y(t)\} &= E\left\{\frac{1}{T} \int_{t-T}^T x(u) du\right\} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^T E\{x(u)\} du \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^T m du = \frac{m}{T} (2T - t) \end{aligned}$$

式中使用了已知条件  $E\{x(t)\} = m$ .

(2) 计算  $y(t)$  的自相关函数, 有

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= E\{y(t_1)y_2(t_2)\} \\ &= E\left\{\frac{1}{T^2} \int_{t_1-T}^T x(u)du \int_{t_2-T}^T x(v)dv\right\} \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{t_1-T}^T du \int_{t_2-T}^T E\{x(u)x(v)\}dv \end{aligned} \quad (\text{题 1.15.1})$$

当  $t_1 \geq t_2$  时, 因为  $u \in [t_1 - T, T]$  和  $v \in [t_2 - T, T]$ , 故作变量代换  $u - v = \tau$  后,  $\tau \geq 0$ . 于是, 式 (题 1.15.1) 变作

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \frac{1}{T^2} \int_{t_1-T}^T du \int_{u-T}^{u+T-t_2} R(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{t_1-T}^T du \int_{u-T}^{u+T-t_2} \alpha \delta(\tau) d\tau \\ &= \frac{\alpha}{T^2} (2T - t_1), \quad t_1 \geq t_2 \end{aligned} \quad (\text{题 1.15.2})$$

同理, 得

$$R_y(t_1, t_2) = \frac{\alpha}{T^2} (2T - t_2), \quad t_2 \geq t_1 \quad (\text{题 1.15.3})$$

综合式 (题 1.15.2) 和式 (题 1.15.3) 得

$$R_y(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\alpha}{T^2} (2T - t_1), & t_1 \geq t_2 \\ \frac{\alpha}{T^2} (2T - t_2), & t_2 \geq t_1 \end{cases} \quad (\text{题 1.15.4})$$

(3) 当  $t_1 = t_2 = t$  时, 式 (题 1.15.4) 给出结果

$$E\{y^2(t)\} = \frac{\alpha}{T^2} (2T - t) \quad (\text{题 1.15.5})$$

计算  $y(t)$  的方差, 得

$$\begin{aligned} \text{var}[y(t)] &= E\{y^2(t)\} - [E\{y(t)\}]^2 \\ &= \frac{\alpha}{T^2} (2T - t) - \left[\frac{m}{T} (2T - t)\right]^2 \\ &= \frac{\alpha}{T^2} (2T - t) - \frac{m^2}{T^2} (2T - t)^2 \end{aligned} \quad (\text{题 1.15.6})$$

答案:

(1)  $y(t)$  的均值

$$E\{y(t)\} = \frac{m}{T} (2T - t)$$

(2)  $y(t)$  的自相关函数

$$E\{y(t_1)y_2(t_2)\} = \begin{cases} \frac{\alpha}{T^2}(2T - t_1), & t_1 \geq t_2 \\ \frac{\alpha}{T^2}(2T - t_2), & t_2 \geq t_1 \end{cases}$$

(3)  $y(t)$  的方差

$$\text{var}[y(t)] = \frac{\alpha}{T^2}(2T - t) - \frac{m^2}{T^2}(2T - t)^2$$

**题 1.16** 由于  $y(t) = x(t) - x(t - D)$ , 故  $E\{y(t)\} = E\{x(t)\} - E\{x(t - D)\} = 0$ .

(1) 由于  $y(t)$  的均值等于零, 故其自协方差函数为

$$\begin{aligned} C_y(\tau) &= R_y(\tau) \\ &= E\{y(t)y(t - \tau)\} \\ &= E\{[x(t) - x(t - D)][x(t - \tau) - x(t - \tau - D)]\} \\ &= 2R_x(\tau) - R_x(\tau + D) - R_x(\tau - D) \end{aligned} \quad (\text{题 1.16.1})$$

将已知  $x(t)$  的自相关函数代入上式, 则

$$C_y(\tau) = 2\sigma^2 \frac{\sin(2\pi f_0 \tau)}{2\pi f_0 \tau} - \sigma^2 \frac{\sin[2\pi f_0(\tau + D)]}{2\pi f_0(\tau + D)} - \sigma^2 \frac{\sin[2\pi f_0(\tau - D)]}{2\pi f_0(\tau - D)} \quad (\text{题 1.16.2})$$

(2) 由自协方差函数和自相关函数之间的关系知  $x(t)$  的自协方差函数

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - [E\{x(t)\}]^2 = R_x(\tau) - m^2$$

将这一关系代入式 (题 1.16.1) 得

$$\begin{aligned} C_y(\tau) &= 2[R_x(\tau) - m^2] - [R_x(\tau + D) - m^2] - [R_x(\tau - D) - m^2] \\ &= 2C_x(\tau) - C_x(\tau + D) - C_x(\tau - D) \end{aligned}$$

作 Fourier 变换后, 则得功率谱密度

$$\begin{aligned} P_y(f) &= 2P_x(f) - e^{j2\pi f D} P_x(f) - e^{-j2\pi f D} P_x(f) \\ &= 2 \left( 1 - \frac{e^{j2\pi f D} + e^{-j2\pi f D}}{2} \right) P_x(f) \\ &= 2[1 - \cos(2\pi f D)] P_x(f) \end{aligned} \quad (\text{题 1.16.3})$$

注意到

$$\begin{aligned} P_x(f) &= \mathcal{F}[C_x(\tau)] \\ &= \mathcal{F}[R_x(\tau) - m^2] \\ &= \mathcal{F}\left[\sigma^2 \frac{\sin(2\pi f_0 \tau)}{2\pi f_0 \tau}\right] - \mathcal{F}[m^2] \end{aligned} \quad (\text{题 1.16.4})$$

利用 Fourier 变换公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-j2\pi f x} dx = \begin{cases} \pi, & |2\pi f| \leq a \\ 0, & |2\pi f| > a \end{cases} \quad (\text{题 1.16.5})$$

和 Fourier 反变换公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi f \tau} df = 1 \quad (\text{题 1.16.6})$$

可以从式 (题 1.16.4) 得到

$$P_x(f) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2f_0} - m^2 \delta(f), & |f| \leq f_0 \\ -m^2 \delta(f), & |f| > f_0 \end{cases} \quad (\text{题 1.16.7})$$

式中利用了  $\delta(f) = 0, \forall |f| > f_0$ 。将式 (题 1.16.7) 代入式 (题 1.16.3), 立即得到

$$\begin{aligned} P_y(f) &= \begin{cases} 2[1 - \cos(2\pi f D)] \left[ \frac{\sigma^2}{2f_0} - m^2 \delta(f) \right], & |f| \leq f_0 \\ 2[1 - \cos(2\pi f D)] \times 0, & |f| > f_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sigma^2}{f_0} [1 - \cos(2\pi f D)], & |f| < f_0 \\ \left( \frac{\sigma^2}{f_0} - 2m^2 \right) [1 - \cos(2\pi f_0 D)], & |f| = f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{题 1.16.8})$$

**答案:** 信号  $y(t) = x(t) - x(t-D)$  的自相关函数由式 (题 1.16.2) 给出, 而其功率谱密度如式 (题 1.16.8) 所示。

**题 1.17** 由于  $x(t)$  和  $v(t)$  均为零均值, 并且相互独立, 所以有

$$E\{y(t)\} = E\{x(t-D)\} + E\{v(t)\} = 0 + 0 = 0$$

即  $y(t)$  也是一个零均值的随机过程。

由于  $x(t)$  和  $y(t)$  都是零均值的随机过程, 所以它们的互协方差函数与互相关函数相等, 即有

$$\begin{aligned}
 C_{xy}(\tau) &= R_{xy}(\tau) \\
 &= E\{x(t+\tau)y^*(t)\} \\
 &= E\{x(t+\tau)[x(t-D)+v(t)]^*\} \\
 &= E\{x(t+\tau)x^*(t-D)\} + E\{x(t+\tau)v^*(t)\} \\
 &= R_x(\tau+D) + 0 \\
 &= Ae^{-\beta|\tau+D|}
 \end{aligned} \tag{题 1.17.1}$$

式中分别使用了  $x(t)$  与  $v(t)$  独立和  $R_x(\tau) = e^{-\beta|\tau|}$  这两个已知条件.

对式 (题 1.17.1) 两边作关于  $\tau$  的 Fourier 变换, 则互功率谱密度

$$\begin{aligned}
 P_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\beta|\tau+D|} \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau
 \end{aligned} \tag{题 1.17.2}$$

作变量代换  $\tau+D = \tau'$  后, 式 (题 1.17.2) 变作

$$\begin{aligned}
 P_{xy}(f) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\beta|\tau'|} e^{-j2\pi f\tau'} d\tau' \right) e^{j2\pi fD} \\
 &= Ae^{j2\pi fD} \left( \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau'} e^{-j2\pi f\tau'} d\tau' + \int_{-\infty}^0 e^{\beta\tau'} e^{-j2\pi f\tau'} d\tau' \right) \\
 &= Ae^{j2\pi fD} \left( \int_0^{\infty} e^{-(\beta+j2\pi f)\tau'} d\tau' + \int_0^{\infty} e^{-(\beta-j2\pi f)\tau'} d\tau' \right)
 \end{aligned} \tag{题 1.17.3}$$

下面计算式 (题 1.17.3) 右边的两项, 得

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-(\beta+j2\pi f)\tau'} d\tau' &= \frac{1}{-(\beta+j2\pi f)} e^{-(\beta+j2\pi f)\tau'} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\beta+j2\pi f}
 \end{aligned} \tag{题 1.17.4}$$

和

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-(\beta-j2\pi f)\tau'} d\tau' &= \frac{1}{-(\beta-j2\pi f)} e^{-(\beta-j2\pi f)\tau'} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\beta-j2\pi f}
 \end{aligned} \tag{题 1.17.5}$$

将式(题 1.17.4)和式(题 1.17.5)代入式(题 1.17.3), 立即有

$$\begin{aligned} P_{xy}(f) &= Ae^{j2\pi fD} \left( \frac{1}{\beta + j2\pi f} + \frac{1}{\beta - j2\pi f} \right) \\ &= Ae^{j2\pi fD} \frac{2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{2A\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 f^2} e^{j2\pi fD} \end{aligned}$$

答案:  $x(t)$  和  $y(t) = x(t - D) + v(t)$  的互功率谱密度为

$$P_{xy}(f) = \frac{2A\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 f^2} e^{j2\pi fD}$$

题 1.18 计算  $x(t)$  和  $y(t)$  的互相关函数, 得

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E\{x(t + \tau)y^*(t)\} \\ &= E\left\{x(t + \tau) \left[ \int_0^\infty h(u)x(t - u)du + v(t) \right]^* \right\} \end{aligned}$$

由于  $x(t)$  与  $v(t)$  统计不相关, 即  $\{x(t + \tau)v(t)\} = 0, \forall \tau$ , 故

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E\left\{ \int_0^\infty x(t + \tau)x^*(t - u)h^*(u)du \right\} \\ &= \int_0^\infty E\{x(t + \tau)x^*(t - u)\}h^*(u)du \\ &= \int_0^\infty R_x(\tau + u)h^*(u)du \end{aligned}$$

由此得互功率谱密度

$$\begin{aligned} P_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^\infty R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left[ \int_0^\infty R_x(\tau + u)h^*(u)du \right] e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty R_x(\tau + u)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \right] h^*(u)du \\ &= \int_0^\infty P_{xx}(f)e^{j2\pi fu}h^*(u)du \\ &= P_{xx}(f) \int_0^\infty h^*(u)e^{j2\pi fu}du \\ &= P_{xx}(f)H^*(f) \end{aligned}$$

故

$$H(f) = \frac{P_{xy}^*(f)}{P_{xx}^*(f)} = \frac{P_{xy}^*(f)}{P_{xx}^*(f)}$$

证毕。

**题 1.19** 由于  $x(t)$  和  $y(t)$  都具有零均值, 故

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) = E\{x(t)y^*(t-\tau)\} \quad (\text{题 1.19.1})$$

于是, 互功率谱密度

$$\begin{aligned} P_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t)y^*(t-\tau)\}e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)y^*(t-\tau)]e^{-j2\pi f\tau} d\tau\right\} \end{aligned}$$

运算后, 得

$$\begin{aligned} P_{xy}(f) &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}[y^*(t-\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}]d\tau\right\} \\ &= E\left\{x(t)e^{-j2\pi ft}\int_{-\infty}^{\infty} [y^*(t-\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}]d\tau\right\} \\ &= E\{x(t)e^{-j2\pi ft}\}Y^*(f) \end{aligned} \quad (\text{题 1.19.2})$$

注意到

$$\begin{aligned} E\{x(t)e^{-j2\pi ft}\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= X(f) \end{aligned} \quad (\text{题 1.19.3})$$

将式 (题 1.19.3) 代入式 (题 1.19.2), 立即得

$$P_{xy}(f) = X(f)Y^*(f) \quad (\text{题 1.19.4})$$

证毕。

题 1.20 根据题意知  $C_{y_i, y_j}(\tau) = R_{y_i, y_j}(\tau)$ , 故

$$\begin{aligned}
 C_{y_1, y_2}(\tau) &= R_{y_1, y_2}(\tau) \\
 &= E\{[x_1(t) + v_1(t)][x_2(t - \tau) + v_2(t - \tau)]^*\} \\
 &= E\{x_1(t)x_2^*(t - \tau)\} \\
 &= R_{x_1, x_2}(\tau) \\
 &= C_{x_1, x_2}(\tau)
 \end{aligned} \tag{题 1.20.1}$$

式中利用了已知条件  $E\{x_i(t)v_j(t + \tau)\} = 0$ ,  $i, j = 1, 2$  和  $E\{v_i(t)v_j(t + \tau)\} = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2$ .

类似地, 可求得

$$\begin{aligned}
 C_{y_1, y_1}(\tau) &= R_{y_1, y_1}(\tau) \\
 &= E\{[x_1(t) + v_1(t)][x_1(t - \tau) + v_1(t - \tau)]^*\} \\
 &= E\{x_1(t)x_1^*(t - \tau)\} + E\{v_1(t)v_1^*(t - \tau)\} \\
 &= R_{x_1, x_1}(\tau) + R_{v_1, v_1}(\tau) \\
 &= C_{x_1, x_1}(\tau) + C_{v_1, v_1}(\tau)
 \end{aligned} \tag{题 1.20.2}$$

和

$$\begin{aligned}
 C_{y_2, y_2}(\tau) &= R_{y_2, y_2}(\tau) \\
 &= E\{[x_2(t) + v_2(t)][x_2(t - \tau) + v_2(t - \tau)]^*\} \\
 &= E\{x_2(t)x_2^*(t - \tau)\} + E\{v_2(t)v_2^*(t - \tau)\} \\
 &= R_{x_2, x_2}(\tau) + R_{v_2, v_2}(\tau) \\
 &= C_{x_2, x_2}(\tau) + C_{v_2, v_2}(\tau)
 \end{aligned} \tag{题 1.20.3}$$

分别作式 (题 1.20.1) ~ 式 (题 1.20.3) 的 Fourier 变换, 得到

$$P_{y_1, y_2}(f) = P_{x_1, x_2}(f) \tag{题 1.20.4}$$

$$P_{y_1, y_1}(f) = P_{x_1, x_1}(f) + P_{v_1, v_1}(f) \tag{题 1.20.5}$$

$$P_{y_2, y_2}(f) = P_{x_2, x_2}(f) + P_{v_2, v_2}(f) \tag{题 1.20.6}$$

由题 1.19 知

$$P_{y_1, y_2}(f) = P_{x_1, x_2}(f) = X_1(f)X_2^*(f)$$

从而有

$$P_{y_1, y_2}^2(f) = |X_1(f)|^2 |X_2^*(f)|^2 = P_{x_1, x_1}(f) P_{x_2, x_2}(f) \quad (\text{题 1.20.7})$$

根据相干函数的定义, 得

$$\begin{aligned} C_{12}^2(f) &= \frac{P_{y_1, y_2}^2(f)}{P_{y_1, y_1}(f) P_{y_2, y_2}(f)} \\ &= \frac{P_{x_1, x_2}^2(f)}{[P_{x_1, x_1}(f) + P_{v_1, v_1}(f)][P_{x_2, x_2}(f) + P_{v_2, v_2}(f)]} \\ &= \frac{P_{x_1, x_1}(f) P_{x_2, x_2}(f)}{[P_{x_1, x_1}(f) + P_{v_1, v_1}(f)][P_{x_2, x_2}(f) + P_{v_2, v_2}(f)]} \end{aligned}$$

分子和分母同除以  $P_{v_1, v_1}(f) P_{v_2, v_2}(f)$ , 则有

$$C_{12}^2(f) = \frac{\alpha_1^2(f) \alpha_2^2(f)}{[1 + \alpha_1^2(f)][1 + \alpha_2^2(f)]} \quad (\text{题 1.20.8})$$

由于

$$\alpha_i(f) = \sqrt{\frac{P_{x_i, x_i}(f)}{P_{v_i, v_i}(f)}}$$

为正实数, 故式 (题 1.20.8) 给出以下结果:

$$C_{12}(f) = \frac{\alpha_1(f) \alpha_2(f)}{\sqrt{[1 + \alpha_1^2(f)][1 + \alpha_2^2(f)]}} \quad (\text{题 1.20.9})$$

证毕。

**题 1.21** (1) 由边缘概率密度函数的定义, 我们有

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y) dx' \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x' - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{(x' - \mu_x)(y - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} dx' \end{aligned}$$

作变量代换  $x = x' - \mu_x$  后, 则

$$f(y) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{x(y - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} dx$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right) \quad (\text{题 1.21.1})$$

中, 令

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2(1-r^2)\sigma_x^2} \\ B &= \frac{r(y-\mu_y)}{2(1-r^2)\sigma_x\sigma_y} \\ C &= \frac{(y-\mu_y)^2}{2(1-r^2)\sigma_y^2} \end{aligned}$$

则由式 (题 1.21.1) 得

$$f(y) = \alpha\sqrt{2\pi(1-r^2)\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad (\text{题 1.21.2})$$

但由于  $f(y)$  是概率密度函数, 其面积等于 1, 故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\sqrt{2\pi(1-r^2)\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

对上式再一次应用积分公式 (题 1.21.1), 我们有

$$\alpha\sqrt{2\pi(1-r^2)\sigma_x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \quad (\text{题 1.21.3})$$

将式 (题 1.21.3) 代入式 (题 1.21.2), 立即得到

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad (\text{题 1.21.4})$$

类似地, 可以证明

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (\text{题 1.21.5})$$

注意, 对于随机变量  $x$ , 式 (题 1.21.3) 的对应结果是

$$\alpha\sqrt{2\pi(1-r^2)\sigma_y^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \quad (\text{题 1.21.6})$$

(2) 当  $x$  和  $y$  不相关时, 它们的相关系数  $r = 0$ 。记住这一点, 有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \alpha \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} \\ &= \alpha \exp \left[ -\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \exp \left[ -\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{题 1.21.7})$$

将  $r = 0$  代入式 (题 1.21.3) 和式 (题 1.21.6), 又有

$$\begin{aligned} \alpha \sqrt{2\pi\sigma_x^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} \\ \alpha \sqrt{2\pi\sigma_y^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \end{aligned}$$

两式相乘, 可求出

$$\alpha = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \quad (\text{题 1.21.8})$$

将式 (题 1.21.8) 代入式 (题 1.21.7) 后, 再利用前面已证明的式 (题 1.21.4) 和式 (题 1.21.5), 即可得到

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} \exp \left[ -\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \\ &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

由于当正态随机变量  $x$  和  $y$  不相关时, 它们的联合概率密度函数等于  $x$  和  $y$  的边缘概率密度函数的乘积, 所以不相关的正态随机变量  $x$  和  $y$  一定是统计独立的。

**题 1.22** 这里要用到两个积分不等式:

(1) 若  $g(x)$  是在  $[a, b]$  内的非减函数, 则

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|dx \quad (\text{题 1.22.1})$$

(2) 若  $g(x)$  是在  $[a, b]$  内的非减函数, 并且  $f(x) \leq p(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)g(x)dx \quad (\text{题 1.22.2})$$

应用这两个不等式, 我们有

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)x(t-u)|du \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)||x(t-u)|du \end{aligned}$$

令输入  $x(t)$  有界, 即  $|x(t)| \leq M$ , 则上式变作

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|du$$

当冲激响应是绝对可积分的函数时, 上式给出

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|du < \infty$$

这表明, 当系统输入有界时, 其输出也是有界的, 即系统是稳定的。证毕。

**题 1.23** (1) 利用 Gram-Schmidt 标准正交化算法, 得到

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{1}{\left(\int_{-1}^1 dx\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \phi_2(x) &= \frac{x - \langle x, 1 \rangle \cdot 1}{\|x - \langle x, 1 \rangle \cdot 1\|} = \frac{x}{\|x\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x \end{aligned}$$

其中  $\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^1 = 0$ . 注意到

$$\begin{aligned} \langle f_3(x), \phi_1(x) \rangle \phi_1(x) &= \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \\ \langle f_3(x), \phi_2(x) \rangle \phi_2(x) &= \left\langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x = 0 \end{aligned}$$

故

$$\phi_3(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\left\|x^2 - \frac{1}{3}\right\|} = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$$

式中利用了积分结果

$$\left\|x^2 - \frac{1}{3}\right\| = \left[ \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx \right]^{1/2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{5}}$$

(2) 由 Gram-Schmidt 标准正交化矩阵范数算法, 得

$$\begin{aligned}
 d_1 &= |f_1| = 1 \\
 \phi_1 &= \frac{d_1}{\langle d_1, d_1 \rangle^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 d_2 &= \begin{vmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 2x \\
 \phi_2 &= \frac{2x}{\left[ \int_{-1}^1 (2x)^2 dx \right]^{1/2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x \\
 d_3 &= \begin{vmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{9} \\
 \phi_3 &= \frac{\frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{9}}{\left\| \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{9} \right\|} = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)
 \end{aligned}$$

可见, 两种算法给出的结果相同, 为

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \phi_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}}x \\
 \phi_3 &= \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)
 \end{aligned}$$

容易验证

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_1, \phi_1 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1 \\
 \langle \phi_2, \phi_2 \rangle &= \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle = \int_{-1}^1 \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}x^3 \Big|_{-1}^1 = 1 \\
 \langle \phi_3, \phi_3 \rangle &= \left\langle \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1) \right\rangle = \frac{5}{8} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1)^2 dx = 1
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\langle \phi_1, \phi_2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0 \\ \langle \phi_1, \phi_3 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1) \right\rangle = \frac{\sqrt{5}}{4} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) dx = 0 \\ \langle \phi_2, \phi_3 \rangle &= \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1) \right\rangle = \frac{\sqrt{15}}{4} \int_{-1}^1 x(3x^2 - 1) dx = 0\end{aligned}$$

这表明, 序列  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$  是标准正交的.

**题 1.24** 为了求出最优展开系数, 我们使用最小二乘法:

$$\int_0^T \left[ \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(t) - x(t) \right]^2 dt = \min$$

式中  $[0, T]$  是已知信号取值的时间间隔. 根据最小二乘法, 我们令上式左边关于  $c_i$  的一阶导数等于零, 得到

$$2 \int_0^T [c_i \phi_i(t) - x(t)] \phi_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

或写作

$$\sum_{i=1}^m c_i \int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \int_0^T x(t) \phi_j(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

从而得到下面的方程组:

$$\begin{cases} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \cdots + \alpha_{1m}c_m = \beta_1 \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \cdots + \alpha_{2m}c_m = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}c_1 + \alpha_{m2}c_2 + \cdots + \alpha_{mm}c_m = \beta_m \end{cases}$$

式中

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt \\ \beta_j &= \int_0^T x(t) \phi_j(t) dt\end{aligned}$$

求解上述方程组, 即可得到展开系数  $c_1, c_2, \dots, c_m$ .

**题 1.25** 仍然使用最小二乘法确定信号的展开系数, 即有

$$\sum_{k=1}^N \left[ \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(t_k) - x(t_k) \right]^2 = \min$$

令上式左边关于展开系数  $c_i$  的一阶导数等于零, 则有

$$\sum_{i=1}^m c_i \sum_{k=1}^N \phi_i(t_k) \phi_j(t_k) = \sum_{k=1}^N x(t_k) \phi_j(t_k), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

或写作

$$\begin{cases} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \cdots + \alpha_{1m}c_m = \beta_1 \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \cdots + \alpha_{2m}c_m = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}c_1 + \alpha_{m2}c_2 + \cdots + \alpha_{mm}c_m = \beta_m \end{cases}$$

式中

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^N \phi_i(t_k) \phi_j(t_k)$$

$$\beta_j = \sum_{k=1}^N x(t_k) \phi_j(t_k)$$

求解上述方程组, 即可求出展开系数  $c_1, c_2, \dots, c_m$ 。

## 第 2 章 参数估计理论

许多信号处理问题都归结为参数估计，本章的核心是参数估计的基本理论与方法。首先，总结参数估计子几种最基本的性能：无偏估计、渐近无偏估计和有效性。然后，从最优估计子的评价标准出发，介绍品质函数的方差——Fisher 信息以及方差的下界——Cramer-Rao 不等式。作为参数估计方法，则依次总结 Bayes 估计、最大似然估计、线性均方估计和最小二乘估计等方法。

### 2.1 主要理论与方法

#### 2.1.1 基本概念

由  $N$  个样本获得的真实参数  $\theta_1, \dots, \theta_p$  的估计子是一个将  $N$  维样本空间  $\mathcal{X}^N$  映射为  $p$  维参数空间  $\Theta$  的函数  $T$ ，记作  $T: \mathcal{X}^N \rightarrow \Theta$ 。

##### 1. 估计子偏差

参数  $\theta$  的估计子  $\hat{\theta}$  的偏差定义为该估计子误差的期望值，即

$$b(\hat{\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} E\{\hat{\theta} - \theta\} = E\{\hat{\theta}\} - \theta \quad (2.1.1)$$

估计子  $\hat{\theta}$  称为无偏估计，若偏差  $b(\hat{\theta})$  等于零或  $E\{\hat{\theta}\} = \theta$ ，即估计子的期望值等于真实参数。

##### 2. 渐近无偏估计子

估计子  $\hat{\theta}$  是真实参数  $\theta$  的渐近无偏估计子，若当样本长度  $N \rightarrow \infty$  时，偏差  $b(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ ，即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{\theta}_N\} = \theta \quad (2.1.2)$$

式中  $\hat{\theta}_N$  表示由  $N$  个样本得到的估计子。

参数  $\theta$  的估计子  $\hat{\theta}$  称为以概率与真实参数  $\theta$  一致，若  $N \rightarrow \infty$  时该估计子以概率收敛为真实参数  $\theta$ ，即

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, \quad \text{当 } N \rightarrow \infty \quad (2.1.3)$$

式中  $\xrightarrow{P}$  表示以概率收敛。

### 3. 估计子均方误差

参数  $\theta$  的估计子  $\hat{\theta}$  的均方误差  $M^2(\hat{\theta})$  定义为该估计子与真实参数的误差平方的期望值, 即

$$M^2(\hat{\theta}) = E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} \quad (2.1.4)$$

4. 估计子  $\hat{\theta}$  的均方误差  $M^2(\hat{\theta})$  与方差  $\text{var}(\hat{\theta})$ 、偏差  $b(\hat{\theta})$  的关系如下:

$$M^2(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) + b^2(\hat{\theta}) \quad (2.1.5)$$

## 2.1.2 两个估计子的比较

相对有效性

$$\text{RE} = \left[ \frac{\text{var}(\hat{\theta}_1)}{\text{var}(\hat{\theta}_2)} \times 100 \right] \% \quad (2.1.6)$$

定义为  $\hat{\theta}_2$  相对于  $\hat{\theta}_1$  的“相对有效性”。

例如, 若  $\text{var}(\hat{\theta}_1) = 1.25\text{var}(\hat{\theta}_2)$ , 则  $\text{RE} = 1.25$ , 即估计子 2 比估计子 1 更有效。

我们称估计子  $\hat{\theta}_1$  优于估计子  $\hat{\theta}_2$ , 若对所有  $\theta$  恒有不等式

$$E\{(\hat{\theta}_1 - \theta)^2\} \leq E\{(\hat{\theta}_2 - \theta)^2\} \quad (2.1.7)$$

## 2.1.3 Fisher 信息与 Cramer-Rao 不等式

### 1. 品质函数

在真实参数  $\theta$  给定的条件下, 随机变量  $x$  的品质函数  $V$  定义为条件分布密度函数的对数  $\ln f(x|\theta)$  相对于真实参数  $\theta$  的偏导数, 即

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta) = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(x|\theta)}{f(x|\theta)} \quad (2.1.8)$$

品质函数的均值等于零。

### 2. Fisher 信息

品质函数的方差称为 Fisher 信息, 用  $J(\theta)$  表示, 定义为

$$J(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta)\right]^2\right\} = -E\left\{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x|\theta)\right\} \quad (2.1.9)$$

定理 2.1.1 (Cramer-Rao不等式) 令  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  为样本向量. 若参数估计  $\hat{\theta}$  是真实参数  $\theta$  的无偏估计, 并且  $\frac{\partial f(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta}$  和  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta^2}$  存在, 则  $\hat{\theta}$  的均方误差所能达到的下界 (称为 Cramer-Rao 下界) 等于 Fisher 信息的倒数, 即

$$\text{var}(\hat{\theta}) = E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} \geq \frac{1}{J(\theta)} \quad (2.1.10)$$

式中 Fisher 信息  $J(\theta)$  由式 (2.1.9) 定义. 不等式中等号成立的充分必要条件是

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) = K(\theta)(\hat{\theta} - \theta) \quad (2.1.11)$$

其中  $K(\theta)$  是  $\theta$  的某个正函数, 并与样本  $x_1, x_2, \dots, x_N$  无关.

Cramer-Rao 下界是所有无偏估计子所能够达到的最低方差, 利用它可以定义最有效的估计子 (即优效估计子).

### 3. 优效估计子

无偏估计子  $\hat{\theta}$  称为是优效的, 若其方差达到 Cramer-Rao 下界, 即  $\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{J(\theta)}$ .

### 4. 有偏估计子 $\hat{\theta}$ 的 Cramer-Rao 不等式

$$E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} \geq \frac{\left(1 + \frac{db(\theta)}{d\theta}\right)^2}{E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta)\right]^2\right\}} \quad (2.1.12)$$

式中  $b(\theta)$  为估计子  $\hat{\theta}$  的偏差, 即  $E\{\hat{\theta}\} = \theta + b(\theta)$ , 并假定  $b(\theta)$  是可微分的.

## 2.1.4 Bayes 估计

### 1. 代价函数

令  $\theta$  是属于参数空间  $\Theta$  的某个参数,  $\hat{\theta}$  是在决策或判定空间  $A$  中取值的一个估计, 称  $C(\hat{\theta}, \theta)$  为损失函数或代价函数, 若它是  $\hat{\theta}$  和  $\theta$  二者的实值函数, 并且满足以下两个条件:

- (1) 对所有  $\hat{\theta} \in A$  和  $\theta \in \Theta$ , 恒有  $C(\hat{\theta}, \theta) \geq 0$ ;
- (2) 对每个  $\theta \in \Theta$  至少在决策空间  $A$  内存在一个  $\hat{\theta}$ , 使得  $C(\hat{\theta}, \theta) = 0$ .

下面是三种典型的损失函数.

#### (1) 绝对损失函数

$$C(\hat{\theta}, \theta) = |\hat{\theta} - \theta| \quad (\text{标量参数}) \quad (2.1.13)$$

$$C(\hat{\theta}, \theta) = \|\hat{\theta} - \theta\| \quad (\text{向量参数}) \quad (2.1.14)$$

式中  $\|\hat{\theta} - \theta\|$  表示估计误差向量  $\hat{\theta} - \theta$  的范数。

(2) 二次型损失函数

$$C(\hat{\theta}, \theta) = |\hat{\theta} - \theta|^2 \quad (\text{标量参数}) \quad (2.1.15)$$

$$C(\hat{\theta}, \theta) = \|\hat{\theta} - \theta\|^2 \quad (\text{向量参数}) \quad (2.1.16)$$

(3) 均匀损失函数

$$C(\hat{\theta}, \theta) = \begin{cases} 0, & |\hat{\theta} - \theta| < \Delta \\ 1, & |\hat{\theta} - \theta| \geq \Delta \end{cases} \quad (\text{标量参数}) \quad (2.1.17)$$

$$C(\hat{\theta}, \theta) = \begin{cases} 0, & \|\hat{\theta} - \theta\| < \Delta \\ 1, & \|\hat{\theta} - \theta\| \geq \Delta \end{cases} \quad (\text{向量参数}) \quad (2.1.18)$$

2. 风险函数

估计子  $\hat{\theta}$  的损失函数的数学期望值

$$R(\hat{\theta}, \theta) = E\{C(\hat{\theta}, \theta)\} \quad (2.1.19)$$

称为该估计子的风险函数。

3. Bayes 估计

使风险函数最小化的参数估计称为 Bayes 估计。

4. 最小均方方差 (MMSE) 准则

若风险函数取参数估计的均方误差

$$R_{\text{MMSE}} \stackrel{\text{def}}{=} E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} \quad (2.1.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 f(x_1, \cdots, x_N, \theta) dx_1 \cdots dx_N d\theta \quad (2.1.21)$$

则使其最小化的参数估计准则称为最小均方误差 (MMSE) 准则。

由最小均方方差准则求得的参数估计称为 MMSE 估计, 由下式给出:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{MMSE}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta | x_1, \cdots, x_N) d\theta \\ &= E\{\theta | x_1, \cdots, x_N\} \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

5. 最大后验概率准则

当风险函数取

$$R_{\text{unif}} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_N) \left[ 1 - \int_{\hat{\theta}-\Delta}^{\hat{\theta}+\Delta} f(\theta|x_1, \cdots, x_N) d\theta \right] dx_1 \cdots dx_N \quad (2.1.23)$$

时, 其最小化的条件为  $\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} R_{\text{unif}} = 0$ , 等价于

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta|x_1, \cdots, x_N) = 0 \quad (2.1.24)$$

这一准则称为最大后验概率准则。由该准则求得的参数估计称为最大后验概率估计。

### 2.1.5 最大似然估计

令随机变量  $x$  的  $N$  个观测值为  $x_1, \cdots, x_N$ , 联合条件概率密度函数  $\{f(x_1, \cdots, x_N|\theta), \theta \in \Theta\}$  的对数  $L(\theta) = \ln f(x_1, \cdots, x_N|\theta)$ , 称为未知参数  $\theta$  的似然函数。所谓似然函数, 就是包含未知参数  $\theta$  信息的可能性函数。

最大似然估计

使未知参数  $\theta$  的似然函数最大化, 也就是使包含  $\theta$  信息的可能性最大化, 这样一种参数估计称为参数的最大似然估计, 定义为

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max_{\theta \in \Theta} f(x_1, \cdots, x_N|\theta) \quad (2.1.25)$$

性质:

(1) 最大似然估计一般不是无偏的, 但其偏差可以通过对估计值乘某个合适的常数加以消除;

(2) 最大似然估计是一致估计;

(3) 最大似然估计给出优效估计, 如果它存在的话;

(4) 对于大的  $N$ , 最大似然估计  $\hat{\theta}_{\text{ML}}$  为一高斯分布, 并且其均值为  $\theta$ , 方差为

$$\frac{1}{N} \left[ E \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [f(x_1, \cdots, x_N|\theta)]^2 \right\} \right]^{-1} \quad (2.1.26)$$

### 2.1.6 线性均方估计

考查估计子

$$\hat{\theta}_{\text{LMS}} = \sum_{i=1}^N w_i x_i \quad (2.1.27)$$

式中,  $w_1, w_2, \dots, w_N$  为待定的权系数。使均方误差  $E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\}$  最小化的线性估计

$$\min E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} = \min E\left\{\left(\sum_{i=1}^N w_i x_i - \theta\right)^2\right\} = \min E\{e^2\} \quad (2.1.28)$$

称为线性均方估计, 其中  $e = \hat{\theta} - \theta$  称为估计误差。

线性均方估计服从正交性原理:

$$E\{ex_i\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1.29)$$

即估计误差与已知观测数据正交。式 (2.1.29) 也可以等价写作

$$E\left\{\left(\sum_{j=1}^N w_j x_j - \theta\right) x_i\right\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

或

$$\sum_{j=1}^N R_{ij} w_j = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1.30)$$

式中

$$R_{ij} = E\{x_i x_j\} \quad \text{和} \quad g_i = E\{\theta x_i\}$$

若令

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = [R_{ij}]_{i=1, j=1}^{N, N} \quad (2.1.31)$$

$$\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_N]^T \quad (2.1.32)$$

$$\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_N]^T \quad (2.1.33)$$

则式 (2.1.30) 可以用向量形式改写为

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{g} \quad (2.1.34)$$

因此, 若  $\mathbf{R}$  非奇异, 则权系数矩阵由

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{g} \quad (2.1.35)$$

决定。

### 2.1.7 最小二乘估计

考虑观测方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , 其中  $\mathbf{x}$  为未知参数向量, 矩阵  $\mathbf{A}$  和向量  $\mathbf{b}$  的元素为已知的观测数据或其统计量 (如相关函数等)。

(1) 未知参数的个数与方程个数相等, 且矩阵  $A$  非奇异时, 矩阵方程  $Ax = b$  称为适定方程, 其解为  $\theta = A^{-1}b$ .

(2) 方程个数多于未知参数个数时, 矩阵方程  $Ax = b$  称为超定方程。

(3) 方程个数少于参数个数时, 矩阵方程  $Ax = b$  称为欠定方程。

最小二乘估计由下式决定:

$$A^T A \hat{\theta} = A^T b \quad (2.1.36)$$

这一方程有两类不同的解:

(1) 矩阵  $A$  满列秩时, 由于  $A^T A$  非奇异, 最小二乘估计由

$$\hat{\theta}_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.1.37)$$

惟一确定, 此时称参数向量  $\theta$  是惟一可辨识的。

(2) 矩阵  $A$  秩亏缺时, 由不同的  $\theta$  值均能得到相同的  $A\theta$  值, 参数向量  $\theta$  是不可(惟一)辨识的。

**Gauss-Markov 定理** 当误差向量的各个分量具有相同的方差, 并且各分量统计不相关时, 最小二乘估计在方差最小的意义上是最优估计。

### 2.1.8 加权最小二乘估计

使“加权误差平方和”

$$Q(\theta) = e^T W e \quad (2.1.38)$$

最小化的估计  $\hat{\theta}$  称为参数向量  $\theta$  的加权最小二乘估计。

加权最小二乘估计由下式给出:

$$\hat{\theta}_{WLS} = (A^T W A)^{-1} A^T W b \quad (2.1.39)$$

其中, 最优加权矩阵为

$$W = V^{-1} \quad (2.1.40)$$

即加权矩阵应取作  $V$  的逆矩阵, 其中  $V$  由误差向量的方差矩阵  $\text{var}(e) = E\{ee^T\} = \sigma^2 V$  所决定。

## 2.2 习 题

**题 2.1**  $x$  是一正态或高斯随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

试证明  $\mu$  和  $\sigma^2$  分别是  $x$  的均值和方差.

**题 2.2** 零均值的正态随机变量  $x$  的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

试证明  $x$  的  $n$  阶矩由下式给出:

$$E\{x^n\} = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1 \\ 1 \cdot 3 \cdots (n-1)\sigma^2, & n = 2k \end{cases}$$

**题 2.3** 一随机信号  $x(t)$  的观测值为  $x(1), x(2), \dots$ . 若  $\bar{x}_k$  和  $s_k^2$  分别是利用  $k$  个观测数据  $x(1), \dots, x(k)$  得到的样本均值和样本方差:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x(i)$$

$$s_k^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [x(i) - \bar{x}_k]^2$$

假定有了一个新的观测值  $x(k+1)$ , 我们希望用  $x(k+1), \bar{x}_k$  和  $s_k^2$  求  $\bar{x}_{k+1}$  和  $s_{k+1}^2$  的估计值. 这样的估计公式称为更新公式, 试求样本均值  $\bar{x}_{k+1}$  和样本方差  $s_{k+1}^2$  的更新公式.

**题 2.4** 令  $\{x(n)\}$  是一平稳过程, 其均值为  $\mu = E\{x(n)\}$ . 给定  $N$  个相互独立的观测样本  $x(1), \dots, x(N)$ , 试证明:

(1) 样本均值

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)$$

是均值  $\mu$  的无偏估计;

(2) 样本方差

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [x(n) - \bar{x}]^2$$

是真实方差  $\sigma^2 = E\{[x(n) - \mu]^2\}$  的无偏估计。

**题 2.5** 一观测过程由  $x(n) = A + v(n)$  定义, 其中  $A$  是一未知的常量参数, 而  $v(n)$  是高斯白噪声, 均值为零, 方差为  $\sigma^2$ 。若  $\hat{A}$  是根据  $x(1), \dots, x(N)$  得到的参数估计值, 求其估计方差的 Cramer-Rao 下界。

**题 2.6** 一随机过程由  $x(n) = A + Bn + v(n)$  描述, 其中  $v(n)$  为高斯白噪声, 均值为零, 方差等于  $\sigma^2$ , 而  $A$  和  $B$  是两个待估计的未知参数。求估计子  $\hat{A}$  和  $\hat{B}$  的估计方差的 Cramer-Rao 下界。

**题 2.7** 令接收信号为

$$y_i = s + w_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

式中  $w_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  是一高斯白噪声过程, 均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ 。假定信号  $s$  和噪声方差  $\sigma^2$  未知, 求  $s$  和  $\sigma^2$  的估计和  $\sigma^2$  的估计方差  $\text{var}(\hat{\sigma}^2)$  的 Cramer-Rao 下界。

**题 2.8** 观测样本由下式给出:

$$y_i = s + w_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中  $w_i$  是零均值的高斯白噪声, 具有单位方差。已知信号  $s$  的概率密度函数为

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}$$

求最小均方误差 (MMSE) 估计  $\hat{s}_{\text{MMSE}}$  和最大后验概率估计  $\hat{s}_{\text{MAP}}$ 。

**题 2.9** 令接收信号由下式给出:

$$y_i = A \cos(\omega_c i + \theta) + w_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

式中  $w_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , 即  $w_i$  是零均值和单位方差的高斯噪声,  $\omega_c$  为载波角频率, 而  $\theta$  是未知的相位。假设  $w_1, \dots, w_N$  相互独立, 求未知相位的最大似然估计  $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 。

**题 2.10** 一放大器的故障时间  $T$  服从指数分布

$$f_T(t) = \begin{cases} \beta e^{-\beta t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中  $\beta$  称为故障率。假定对  $N$  个同类放大器观测到故障时间  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , 并且  $T_i$  相互统计独立。

(1) 求未知故障速率  $\beta$  的最大似然估计。

(2) 当  $N$  非常大时, 求故障速率  $\beta$  的概率密度函数。

提示: 使用中心极限定理和积分公式

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

**题 2.11** 一接收信号由

$$y(n) = s + v(n), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

描述, 其中  $v(n)$  为一高斯随机噪声, 它具有零均值和未知方差  $\sigma^2$ , 并且相互统计独立。求信号  $s$  和噪声方差的最大似然估计。

**题 2.12** 考查一未知的实随机向量  $x$ , 试求其线性均方估计  $\hat{x}$ 。

**题 2.13** 令未知的随机变量服从均匀分布, 其概率分布为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在无其他信息的情况下, 用一常数作随机变量  $x$  的线性均方估计。求该均方估计。

**题 2.14** 一接收信号由

$$y(n) = s + v(n), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

描述, 其中  $v(n)$  为相互独立的随机变量, 且  $E\{v(n)\} = 0$  和

$$E\{v(i)v(j)\} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N_0, & i = j \end{cases}$$

求信号  $s$  的线性均方估计。

**题 2.15** 给定  $n$  个独立的随机变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 它们具有相同的均值  $\mu$  和不同的方差  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ 。现在用  $n$  个常数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  拟合这些随机变量, 即

$$z = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

若希望  $E\{z\} = \mu$  和  $\sigma_z^2$  最小, 求  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**题 2.16** 一飞行器在某段时间从初始位置  $\alpha$ , 以恒定速度  $\beta$  沿直线移动. 飞行器的观测位置由下式给出:

$$y_i = \alpha + \beta i + w_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

式中  $w(i)$  为随机变量, 其均值等于零. 今有 10 个观测值  $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 2, y_4 = 4, y_5 = 4, y_6 = 8, y_7 = 9, y_8 = 10, y_9 = 12, y_{10} = 13$ . 求飞行器初始位置  $\alpha$  和飞行速度  $\beta$  的最小二乘估计.

**题 2.17** 考虑多类目标信号的可识别性<sup>[11]</sup>. 假定有  $c$  类目标信号, 在训练阶段已获得  $N = N_1 + N_2 + \dots + N_c$  个特征向量  $s_{N_1}, s_{N_2}, \dots, s_{N_c}$ , 其中  $s_{N_i}$  表示属于第  $i$  类目标的  $N_i$  个特征向量, 其维数是  $Q \times 1$ . 当一个特征向量  $s$  属于第  $i$  类目标的特征向量时, 我们将其记作  $s \in \mathcal{X}_i$ . 定义类内散布矩阵

$$S_w = \sum_{i=1}^c S_i \quad (\text{题 2.17.1})$$

式中

$$S_i = \sum_{s \in \mathcal{X}_i} (s - m_i)(s - m_i)^T \quad (\text{题 2.17.2})$$

而

$$m_i = \frac{1}{N} \sum_{s \in \mathcal{X}_i} s_i \quad (\text{题 2.17.3})$$

表示第  $i$  类特征向量的均值或中心. 类似地, 类间散布矩阵定义为

$$S_b = \sum_{i=1}^c N_i (m_i - m)(m_i - m)^T \quad (\text{题 2.17.4})$$

式中  $m$  是  $N = N_1 + \dots + N_c$  个特征向量的总体均值向量, 即

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c N_i m_i \quad (\text{题 2.17.5})$$

令  $U$  为  $Q \times Q$  维类可识别矩阵, 而代价函数

$$J(U) = \frac{\prod_{\text{diag}} U^T S_b U}{\prod_{\text{diag}} U^T S_w U} \quad (\text{题 2.17.6})$$

定义为  $N$  个特征向量的类可识别的有效性测度, 试求类可识别矩阵  $U$  的解。

**题 2.18** 令  $y$  为一测量数据向量, 它服从下面的观测方程:

$$y = Hx + v$$

式中  $H$  为观测矩阵,  $x$  代表不可观测的状态向量, 而  $v$  是加性观测噪声向量。假定观测噪声向量服从高斯分布

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} v^T \mathbf{R}^{-1} v\right)$$

式中  $\mathbf{R}$  是观测噪声向量的协方差矩阵, 而  $|\mathbf{R}|$  为行列式。求未知状态向量  $x$  的最大似然估计  $\hat{x}$  和估计误差向量  $e = x - \hat{x}$  的协方差矩阵  $P_e$ 。这一问题称为线性高斯测量情况下的最大似然估计<sup>[23]</sup>。

**题 2.19** 一观测方程由下式描述:

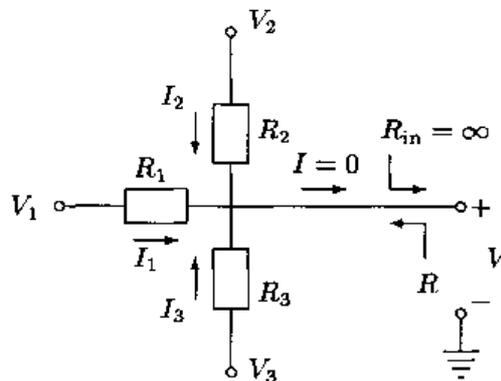
$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + v$$

式中  $x$  为一确定性的未知参数, 而观测噪声向量  $v$  服从正态分布:

$$v \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}\right)$$

求  $x$  的最大似然估计。

**题 2.20** 图题 2.20 画出了一模拟高斯测量权利下的最大似然估计的电路<sup>[23]</sup>。



图题 2.20 模拟最大似然估计的电路

图中, 电压  $V_i$  加在电阻  $R_i$  的一端和地之间。各个电阻的另一端连接于公共点。若  $R_{in} = \infty$ , 求电压  $V$  的表达式和电压  $V_1, V_2, V_3$  的测量误差的协方差。

**题 2.21** 假定观测向量可以用

$$y = A\theta + e$$

表示, 其中  $N \times p$  矩阵  $A$  的秩等于  $p$ , 并且  $E\{e\} = 0$  和  $\text{var}(e) = \sigma^2 \Sigma$  ( $\Sigma$  为正定矩阵)。令  $\hat{\theta}_{\text{WLS}} = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1} y$  是  $\theta$  的加权最小二乘估计。证明

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p} (y - A\hat{\theta}_{\text{WLS}})^T \Sigma^{-1} (y - A\hat{\theta}_{\text{WLS}})$$

是  $\sigma^2$  的无偏估计。

**题 2.22** 考虑使用  $N$  个随机变量观测值  $x_1, x_2, \dots, x_N$  估计一随机变量  $y$  的一般情况。若随机变量为复变量, 并且  $y$  的估计取作

$$\hat{y} = w^H x + b$$

式中  $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  为观测数据向量。求使均方误差为最小的最优滤波器  $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$  和最小均方误差的表达式。

**题 2.23** 已知  $x_1$  和  $x_2$  是两个随机变量, 而  $y$  是与  $x_1, x_2$  相关的量。令  $v = [y, x_1, x_2]^T$ , 并且  $v$  的均值向量和协方差矩阵分别为

$$m_v = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

和

$$C_v = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

求  $y$  的最优线性均方估计  $\hat{y}$  和最小均方误差  $J_{\text{MSE}}$ 。

## 2.3 习题解答

**题 2.1** 首先, 概率密度函数  $f(x)$  是一关于  $x-\mu$  对称的函数. 这表明,  $E\{x\} = \mu$ , 即  $\mu$  确实是正态随机变量  $x$  的均值.

由于任何一个概率密度函数的面积都等于 1, 即  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ , 故

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}\sigma$$

求上式两边关于  $\sigma$  的导数, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{题 2.1.1})$$

由方差的定义, 易知

$$\begin{aligned} E\{(x-\mu)^2\} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned} \quad (\text{题 2.1.2})$$

将式 (题 2.1.1) 代入式 (题 2.1.2), 立即得

$$E\{(x-\mu)^2\} = \sigma^2$$

因此, 随机变量  $x$  的均值为  $\mu$ , 方差等于  $\sigma^2$ . 证毕.

**题 2.2** 考查正态随机变量  $x$  的奇次阶矩

$$E\{x^{2k+1}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} f(x)dx$$

由于  $f(x) = f(-x)$  为偶函数, 故上式的积分函数  $x^{2k+1}f(x)$  是  $x$  的奇函数, 其积分等于 0. 从而,  $x$  的奇次阶矩恒等于 0.

求积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

两边关于  $\alpha$  的  $k$  阶导数, 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}$$

令  $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$ , 则上式给出

$$E\{x^{2k}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \sigma^2$$

综合以上结果, 正态随机变量  $x$  的  $n$  阶矩为

$$E\{x^n\} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ 1 \cdot 3 \cdots (n-1) \sigma^2, & n = 2k \end{cases}$$

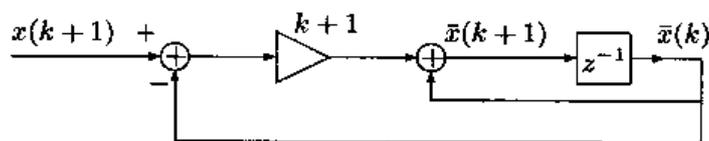
这就完成了本题的证明。

**题 2.3** 由题给的样本均值定义式知

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} x(i) \\ &= \frac{1}{k+1} \left[ \sum_{i=1}^k x(i) + x(k+1) \right] \\ &= \frac{k}{k+1} \bar{x}_k + \frac{1}{k+1} x(k+1) \end{aligned} \quad (\text{题 2.3.1})$$

这就是样本均值的更新公式。

图题 2.3 画出了用一线性系统产生样本均值的示意图。



图题 2.3 递推产生样本均值

类似地, 由样本方差的估计公式, 得

$$\begin{aligned} s_{k+1}^2 &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} [x(i) - \bar{x}_{k+1}]^2 \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k ([x(i) - \bar{x}_k] + [\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}])^2 + \frac{1}{k+1} [x(k+1) - \bar{x}_{k+1}]^2 \\ &= \frac{k}{k+1} s_k^2 + \frac{1}{k+1} [x(k+1) - \bar{x}_k]^2 + (\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^2 + \\ &\quad \frac{2}{k+1} (\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}) [x(k+1) - \bar{x}_k] \end{aligned}$$

将式 (题 2.3.1) 代入上式, 消去  $\bar{x}_{k+1}$  得

$$s_{k+1}^2 = \frac{k}{k+1}s_k^2 + \frac{k}{(k+1)^2}[x(k+1) - \bar{x}_k]^2$$

整理后, 即得样本方差的更新公式为

$$s_{k+1}^2 = s_k^2 + \frac{1}{k+1} \left\{ \frac{k}{k+1}[x(k+1) - \bar{x}_k]^2 - s_k^2 \right\} \quad (\text{题 2.3.2})$$

**答案:** 样本均值  $\bar{x}_k$  和样本方差  $s_k^2$  的更新公式由式 (题 2.3.1) 和式 (题 2.3.2) 分别给出。

**题 2.4** (1) 求样本均值  $\bar{x}$  的数学期望, 得

$$\begin{aligned} E\{\bar{x}\} &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)\right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E\{x(n)\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

因此, 样本均值  $\bar{x}$  是真实均值  $\mu$  的无偏估计。

(2) 求样本方差的数学期望, 得

$$\begin{aligned} E\{s^2\} &= E\left\{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [x(n) - \bar{x}]^2\right\} \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N E\{[x(n) - \bar{x}]^2\} \end{aligned} \quad (\text{题 2.4.1})$$

式中

$$\begin{aligned} E\{[x(n) - \bar{x}]^2\} &= E\left\{\left([x(n) - \mu] - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(i) - \mu]\right)^2\right\} \\ &= E\{[x(n) - \mu]^2\} + \frac{1}{N^2} E\left\{\left(\sum_{n=1}^N [x(n) - \mu]\right)^2\right\} - \\ &\quad 2 \frac{1}{N} E\left\{[x(n) - \mu] \sum_{i=1}^N [x(i) - \mu]\right\} \end{aligned} \quad (\text{题 2.4.2})$$

注意到  $E\{[x(i) - \mu][x(j) - \mu]\} = 0, i \neq j$ , 故有

$$\begin{aligned} E\left\{\left(\sum_{n=1}^N [x(n) - \mu]\right)^2\right\} &= E\left\{\sum_{n=1}^N [x(n) - \mu] \sum_{i=1}^N [x(i) - \mu]\right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N E\{[x(n) - \mu][x(i) - \mu]\} \\ &= \sum_{n=1}^N E\{[x(n) - \mu]^2\} \end{aligned} \quad (\text{题 2.4.3})$$

和

$$\begin{aligned} E\left\{[x(n) - \mu] \sum_{i=1}^N [x(i) - \mu]\right\} &= \sum_{i=1}^N E\{[x(n) - \mu][x(i) - \mu]\} \\ &= E\{[x(n) - \mu]^2\} \end{aligned} \quad (\text{题 2.4.4})$$

将式 (题 2.4.3) 和式 (题 2.4.4) 代入式 (题 2.4.2), 得

$$\begin{aligned} E\{[x(n) - \bar{x}]^2\} &= \sigma^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N E\{[x(n) - \mu]^2\} - 2 \frac{1}{N} E\{[x(i) - \mu]^2\} \\ &= \sigma^2 + \frac{1}{N^2} N \sigma^2 - 2 \frac{1}{N} \sigma^2 \\ &= \frac{N-1}{N} \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{题 2.4.5})$$

将式 (题 2.4.5) 代入式 (题 2.4.1), 立即有

$$\begin{aligned} E\{s^2\} &= \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \frac{N-1}{N} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

这表明, 样本方差  $s^2$  是真实方差  $\sigma^2$  的无偏估计。

综合 (1) 和 (2) 两部分的结果, 本题的证明即告完成。

**题 2.5** 由于  $v(n)$  为零均值的高斯分布, 而  $A$  为常数, 所以  $v(n) = A + v(n)$  也为高斯分布, 其均值为  $A$ . 于是, 高斯随机变量  $x(n)$  的概率密度分布为

$$\begin{aligned} f(x; A) &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}[x(n) - A]^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N [x(n) - A]^2\right) \end{aligned}$$

似然函数  $\ln f(x; A)$  关于未知参数  $A$  的一阶导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln f(x; A)}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} \left\{ -\ln \left[ (2\pi\sigma^2)^{N/2} \right] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N [x(n) - A]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N [x(n) - A] = \frac{N}{\sigma^2} (\hat{x} - A)\end{aligned}$$

式中  $\hat{x}$  代表  $x(n)$  的样本平均。上式再对  $A$  求导数, 得到

$$\frac{\partial^2 \ln f(x; A)}{\partial A^2} = -\frac{N}{\sigma^2}$$

由 Cramer-Rao 下界的定义

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-\text{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2} \right\}}$$

最后得

$$\text{var}(\hat{A}) \geq \frac{N}{\sigma^2}$$

**答案:** 估计子  $\hat{A}$  的估计方差的 Cramer-Rao 下界为  $N/\sigma^2$ 。

**题 2.6** 令  $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$ 。由于  $v(n)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的高斯随机过程, 而  $A$  和  $Bn$  都是确定性过程, 因此  $x(n)$  也是一高斯随机过程, 其均值  $A + Bn$  是时间的函数。这意味着  $x(n)$  的概率密度函数为

$$\begin{aligned}f(x; \theta) &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} [x(n) - A - Bn]^2 \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N [x(n) - A - Bn]^2 \right)\end{aligned}$$

在多个未知参数的情况下, Cramer-Rao 不等式变为矩阵不等式:

$$\Sigma \geq J^{-1}(\theta)$$

其中  $\Sigma$  为无偏估计子  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的协方差矩阵, 而  $J^{-1}$  是 Fisher 信息矩阵  $J$  的逆矩阵, 而信息矩阵  $J$  的元素由

$$\begin{aligned}J_{ij}(\theta) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \theta) \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} dx \\ &= -\text{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}\end{aligned}$$

给出。在本习题中，这些元素分别为

$$J_{11}(\theta) = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial A^2} \right\} = N/\sigma^2$$

和

$$\begin{aligned} J_{22}(\theta) &= -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial B^2} \right\} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6\sigma^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{12}(\theta) &= J_{21}(\theta) \\ &= -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial A \partial B} \right\} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \\ &= \frac{N(N+1)}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

注意到逆矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1}(\theta) &= \begin{bmatrix} \frac{N}{\sigma^2} & \frac{N(N+1)}{2\sigma^2} \\ \frac{N(N+1)}{2\sigma^2} & \frac{N(N+1)(2N+1)}{6\sigma^2} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{2(2N+1)}{N(N-1)} & -\frac{6}{N(N-1)} \\ -\frac{6}{N(N-1)} & \frac{12}{N(N^2-1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{A}) &\geq \frac{2(2N+1)\sigma^2}{N(N-1)} \\ \text{var}(\hat{B}) &\geq \frac{12\sigma^2}{N(N^2-1)} \end{aligned}$$

**答案：** 估计子  $\hat{A}$  和  $\hat{B}$  的估计方差的 Cramer-Rao 下界分别为  $\frac{2(2N+1)\sigma^2}{N(N-1)}$  和  $\frac{12\sigma^2}{N(N^2-1)}$ 。

**题 2.7** 首先, 接收信号  $y_i$  与加性噪声  $w_i$  具有相同的概率密度函数, 即

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) &= f(w_1, \dots, w_N) \\ &= \prod_{i=1}^N f(w_i) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{w_i^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

从而得对数似然函数

$$\begin{aligned} L &= \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) \\ &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

这一对数似然函数关于信号  $s$  和噪声方差  $\sigma^2$  的偏导分别由

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) = \sum_{i=1}^N \frac{y_i - s}{\sigma^2} \quad (\text{题 2.7.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{2\sigma^4} \quad (\text{题 2.7.2})$$

给出.

令以上两项偏导等于零, 即可得到信号  $s$  和噪声方差  $\sigma^2$  的最大似然估计分别为

$$\hat{s}_{\text{ML}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \bar{y} \quad (\text{题 2.7.3})$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (\text{题 2.7.4})$$

下面分别讨论它们的无偏性和方差.

(1) 最大似然估计  $\hat{s}_{\text{ML}}$  的无偏性和方差

求  $\hat{s}_{\text{ML}}$  的数学期望, 得

$$\begin{aligned} E\{\hat{s}_{\text{ML}}\} &= E\{\bar{y}\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i\right\} \\ &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s + w_i)\right\} \\ &= s + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{w_i\} \\ &= s \end{aligned}$$

即  $\hat{s}_{\text{ML}}$  是无偏估计.

求式 (题 2.7.1) 关于  $s$  的偏导, 得

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2} = -\frac{N}{\sigma^2}$$

于是, 参数估计  $\hat{s}_{\text{ML}}$  的 Cramer-Rao 不等式为

$$\text{var}(\hat{s}_{\text{ML}}) = E\{(\hat{s}_{\text{ML}} - s)^2\} \geq -\frac{1}{\frac{-N}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{题 2.7.5})$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) &= \frac{\sum_{i=1}^N y_i - Ns}{\sigma^2} \\ &= \frac{N\bar{y} - Ns}{\sigma^2} \\ &= \frac{N}{\sigma^2} (\bar{y} - s) \\ &= \frac{N}{\sigma^2} (\hat{s} - s) \end{aligned}$$

即具有  $\frac{\partial}{\partial s} \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) = K(s)(\hat{s} - s)$  的形式, 这里

$$K(s) = \frac{N}{\sigma^2}$$

故 Cramer-Rao 不等式 (题 2.7.5) 中的等号成立, 即有

$$\text{var}(\hat{s}_{\text{ML}}) = E\{(\hat{s}_{\text{ML}} - s)^2\} = \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{题 2.7.6})$$

由于估计子  $\hat{s}_{ML}$  的方差达到 Cramer-Rao 下界, 故  $\hat{s}_{ML}$  是一个优效估计子。

(2) 最大似然估计  $\hat{\sigma}_{ML}^2$  的 Cramer-Rao 下界

令

$$x_i = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma} \quad (\text{题 2.7.7})$$

则容易求出  $x_i$  的以下统计量:

$$E\{x_i\} = \frac{1}{\sigma}[E\{y_i\} - E\{\bar{y}\}] = \frac{1}{\sigma}(s - s) = 0 \quad (\text{题 2.7.8a})$$

$$\begin{aligned} E\{x_i^2\} &= \frac{1}{\sigma^2} E\{(y_i - \bar{y})^2\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} E\{(s + w_i - \bar{y})^2\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (E\{s^2\} + E\{w_i^2\} + E\{\bar{y}^2\} - 2E\{s\bar{y}\}) \end{aligned} \quad (\text{题 2.7.8b})$$

这里利用了噪声  $w_i$  与信号  $s$ 、均值  $\bar{y}$  均不相关的结果  $E\{sw_i\} = 0$  和  $E\{w_i\bar{y}\} = 0$ 。

将  $\sigma^2 = E\{w_i^2\}$  和

$$E\{s\bar{y}\} = E\{(y_i - w_i)\bar{y}\} = E\{y_i\bar{y}\}$$

在上式中代入式 (题 2.7.8b), 即得

$$\begin{aligned} E\{x_i^2\} &= \frac{1}{\sigma^2} (E\{s^2\} + \sigma^2 + E\{\bar{y}^2\} - 2E\{y_i\bar{y}\}) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[ E\{s^2\} + \sigma^2 + E\{\bar{y}^2\} - 2E\left\{y_i \frac{y_1 + \cdots + y_N}{N}\right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{题 2.7.9})$$

式中的  $E\{y_i y_j\}$  和  $E\{(\bar{y})^2\}$  可分别求得如下:

$$\begin{aligned} E\{y_i y_j\} &= E\{(s + w_i)(s + w_j)\} \\ &= E\{s^2\} + E\{w_i w_j\} \\ &= E\{s^2\} + \sigma^2 \delta(i - j) \end{aligned} \quad (\text{题 2.7.10a})$$

$$\begin{aligned} E\{(\bar{y})^2\} &= \text{var}(\bar{y}) + [E\{\bar{y}\}]^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{N} + [E\{s\}]^2 \end{aligned} \quad (\text{题 2.7.10b})$$

将式 (题 2.7.10) 代入式 (题 2.7.9) 后, 得

$$\begin{aligned} E\{x_i^2\} &= \frac{1}{\sigma^2} \left[ E\{s^2\} + \sigma^2 - 2 \left( \frac{E\{s^2\}N + \sigma^2}{N} \right) + \left( \frac{\sigma^2}{N} + E\{s^2\} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \sigma^2 - \frac{2\sigma^2}{N} + \frac{\sigma^2}{N} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{N} \right) \\ &= \frac{N-1}{N} \end{aligned} \quad (\text{题 2.7.11})$$

由式 (题 2.7.7) 和式 (题 2.7.11) 知

$$E \left\{ \left[ \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} \left( \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma} \right) \right]^2 \right\} = 1 \quad (\text{题 2.7.12})$$

另一方面, 将式 (题 2.7.7) 代入式 (题 2.7.2), 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} \frac{N-1}{N} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \\ &= -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \frac{N-1}{N} x_i \end{aligned} \quad (\text{题 2.7.13})$$

令

$$z_i = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} x_i \quad (\text{题 2.7.14})$$

$$Z = \sum_{i=1}^N z_i^2 \quad (\text{题 2.7.15})$$

则式 (题 2.7.13) 变作

$$\frac{\partial \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} \frac{1}{\sigma^2} Z \quad (\text{题 2.7.16})$$

由式 (题 2.7.8a) 及式 (题 2.7.14) 易知

$$E\{z_i\} = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} E\{x_i\} = 0 \quad (\text{题 2.7.17})$$

又由式 (题 2.7.11) 及式 (题 2.7.14) 知

$$E\{z_i^2\} = \frac{N-1}{N} E\{x_i^2\} = \frac{N-1}{N} \frac{N}{N-1} = 1 \quad (\text{题 2.7.18})$$

式 (题 2.7.17) 和式 (题 2.7.18) 表明,  $z_i$  为  $\mathcal{N}(0, 1)$ , 即均值等于零、方差为 1 的标准正态分布. 由概率论知, 式 (题 2.7.15) 定义的随机变量  $Z$  服从自由度  $N$  的  $\chi^2$  分布, 即有

$$E\{Z\} = N \quad (\text{题 2.7.19})$$

$$E\{Z^2\} = 2N + N^2 \quad (\text{题 2.7.20})$$

下面求 Fisher 信息  $J(\sigma^2)$ . 为此, 由式 (题 2.7.13) 得

$$\left[ \frac{\partial \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} \right]^2 = \left[ \frac{N^2}{4\sigma^4} - \frac{N^2}{2(N-1)\sigma^4} Z + \frac{1}{4} \frac{N^2}{(N-1)^2} \frac{Z^2}{\sigma^4} \right]$$

求数学期望后, 有

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left[ \frac{\partial \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{N^2}{4\sigma^4} - \frac{N^2}{2(N-1)\sigma^4} \frac{1}{\sigma^4} E\{Z\} + \frac{N^2}{4(N-1)^2\sigma^4} E\{Z^2\} \end{aligned} \quad (\text{题 2.7.21})$$

将式 (题 2.7.19) 和式 (题 2.7.20) 代入式 (题 2.7.21), 则

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left[ \frac{\partial \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{N^2}{4\sigma^4} - \frac{N^2}{2(N-1)\sigma^4} \frac{1}{\sigma^4} N + \frac{N^2}{4(N-1)^2\sigma^4} \frac{1}{\sigma^4} (2N + N^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \left[ \frac{N^2}{4} - \frac{N^3}{2(N-1)} + \frac{N^2(2N + N^2)}{4(N-1)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{题 2.7.22})$$

注意, 由式 (题 2.7.4) 给出的最大似然估计  $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$  是一个有偏估计, 因为

$$\begin{aligned} E\{\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2\} &= E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{y_i - \bar{y}\}^2 \\ &= \frac{N-1}{N} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned}$$

这表明, 偏差为

$$b(\theta) = -\frac{\sigma^2}{N}$$

其一阶导数

$$\frac{db(\theta)}{d\theta} = -\frac{1}{N} \quad (\text{题 2.7.23})$$

式中  $\theta = \sigma^2$ .

将式 (题 2.7.22) 和式 (题 2.7.23) 代入 2.1 节的公式 (2.1.12), 即得到最大似然估计  $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$  的 Cramer-Rao 不等式为

$$E\{(\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2 - \sigma^2)^2\} \geq \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2}{\sigma^4 \left[\frac{N^2}{4} - \frac{N^3}{2(N-1)} + \frac{N^3(2+N)}{4(N-1)^2}\right]} \quad (\text{题 2.7.24})$$

答案: 最大似然估计  $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$  的 Cramer-Rao 下界为

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2}{\sigma^4 \left[\frac{N^2}{4} - \frac{N^3}{2(N-1)} + \frac{N^3(2+N)}{4(N-1)^2}\right]} \quad (\text{题 2.7.25})$$

**题 2.8** 由于参数  $\theta$  的 MMSE 估计等于已知样本情况下  $\theta$  的条件均值, 故有

$$\begin{aligned} \hat{s}_{\text{MMSE}} &= E\{s|y_1, \dots, y_N\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s f(s|y_1, \dots, y_N) ds \end{aligned} \quad (\text{题 2.8.1})$$

由于  $w_i$  服从高斯分布  $\mathcal{N}(0, 1)$ , 故  $y_i = s + w_i$  服从高斯分布  $\mathcal{N}(s, 1)$ .

由高斯白噪声  $w_i$  的不相关性和独立性的等价关系知, 观测样本  $y_i$  相互独立, 故观测样本的条件概率密度

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_N|s) &= f(y_1) \cdots f(y_N) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left[-\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{2}\right] \end{aligned} \quad (\text{题 2.8.2})$$

若令

$$\bar{y} = \frac{1}{N}(y_1 + \cdots + y_N)$$

代表  $N$  个观测数据的样本均值, 则由式 (题 2.8.2) 可求得参数  $s$  的条件概率密度为

$$\begin{aligned}
 f(s|y_1, \dots, y_N) &= \frac{f(y_1, \dots, y_N|s)f(s)}{f(y_1, \dots, y_N)} \\
 &= \frac{f(y_1, \dots, y_N|s)f(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_N|s)f(s)ds} \\
 &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left[-\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - s)^2 + s^2\right] ds} \\
 &= \frac{(N+1)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(N+1)\left(s - \frac{N\bar{y}}{N+1}\right)^2\right] \quad (\text{题 2.8.3})
 \end{aligned}$$

式中使用了公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s|y_1, \dots, y_N)ds = 1 \quad (\text{题 2.8.4})$$

将式 (题 2.8.3) 代入式 (题 2.8.1) 得 MMSE 估计

$$\begin{aligned}
 \hat{s}_{\text{MMSE}} &= \int_{-\infty}^{\infty} s \frac{(N+1)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(N+1)\left(s - \frac{N\bar{y}}{N+1}\right)^2\right] ds \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N+1} \quad (\text{题 2.8.5})
 \end{aligned}$$

取式 (题 2.8.3) 的对数, 得到似然函数

$$\ln f(s|y_1, \dots, y_N) = \ln \sqrt{\frac{N+1}{2\pi}} - \frac{1}{2}(N+1)\left(s - \frac{N\bar{y}}{N+1}\right)^2 \quad (\text{题 2.8.6})$$

求相对于  $s$  的偏导数, 并令结果等于零, 得

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln f(s|y_1, \dots, y_N) = -\frac{N+1}{2} \cdot 2\left(s - \frac{N\bar{y}}{N+1}\right) = 0$$

因此, 最大后验概率估计为

$$\hat{s}_{\text{MAP}} = \frac{N\bar{y}}{N+1} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N+1} \quad (\text{题 2.8.7})$$

比较式 (题 2.8.5) 和式 (题 2.8.7) 知, 在本题的情况下  $\hat{s}_{\text{MMSE}} = \hat{s}_{\text{MAP}}$ .

答案：信号的最大似然估计和最大后验概率估计相等，为

$$\hat{s}_{\text{MMSE}} = \hat{s}_{\text{MAP}} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N+1}$$

**题 2.9** 由于  $w_1, \dots, w_N$  相互独立，所以  $y_1, \dots, y_N$  也相互独立，并且与  $w_i$  一样服从高斯分布。于是，在  $\theta$  给定情况下  $y_1, \dots, y_N$  的联合概率密度分布为

$$f(y_1, \dots, y_N | \theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp \left[ -\sum_{i=1}^N \frac{[y_i - A \cos(\omega_c i + \theta)]^2}{2} \right]$$

由此得似然函数

$$L = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [y_i - A \cos(\omega_c i + \theta)]^2$$

求其相对于  $\theta$  的偏导，并令结果等于零，即有

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{2}{2} \sum_{i=1}^N [y_i - A \cos(\omega_c i + \theta)] \sin(\omega_c i + \theta) = 0$$

因此，最大似然估计  $\hat{\theta}_{\text{ML}}$  必须满足

$$\sum_{i=1}^N A \cos(\omega_c i + \hat{\theta}_{\text{ML}}) \sin(\omega_c i + \hat{\theta}_{\text{ML}}) = \sum_{i=1}^N y_i \sin(\omega_c i + \hat{\theta}_{\text{ML}}) \quad (\text{题 2.9.1})$$

这是一个非线性方程。在很多情况下，最大似然估计问题都会导致非线性方程。求解非线性方程是困难的。然而，如果我们忽略双倍频率  $2\omega_c$  项，则式(题 2.9.1)简化为

$$\sum_{i=1}^N y_i \sin(\omega_c i + \hat{\theta}_{\text{ML}}) = 0$$

或

$$\sin \hat{\theta}_{\text{ML}} \sum_{i=1}^N y_i \cos(\omega_c i) = -\cos \hat{\theta}_{\text{ML}} \sum_{i=1}^N y_i \sin(\omega_c i)$$

由此得

$$\tan \hat{\theta}_{\text{ML}} = -\frac{\sum_{i=1}^N y_i \sin(\omega_c i)}{\sum_{i=1}^N y_i \cos(\omega_c i)}$$

答案: 相位的最大似然估计为

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = -\tan^{-1} \left[ \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sin(\omega_c i)}{\sum_{i=1}^N y_i \cos(\omega_c i)} \right] \quad (\text{题 2.9.2})$$

**题 2.10** (1) 由于  $T_1, \dots, T_N$  统计独立, 所以给定故障率  $\beta$  情况下的条件概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(T_1, \dots, T_N | \beta) &= \beta e^{-\beta T_1} \beta e^{-\beta T_2} \dots \beta e^{-\beta T_N} \\ &= \beta^N e^{-\beta(T_1 + T_2 + \dots + T_N)} \end{aligned}$$

由此得对数似然函数

$$L = N \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^N T_i$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{N}{\beta} - \sum_{i=1}^N T_i = 0$$

得故障率  $\beta$  的最大似然估计

$$\hat{\beta}_{\text{ML}} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i} = \frac{1}{\bar{T}} \quad (\text{题 2.10.1})$$

式中

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i \quad (\text{题 2.10.2})$$

表示观测到的  $N$  个故障时间的样本平均。

(2) 根据中心极限定理知, 当  $N$  很大时,  $N$  个随机观测值之和服从高斯分布, 因此由式 (题 2.10.1) 给出的最大似然估计  $\hat{\beta}_{\text{ML}} = 1/\bar{T}$  是高斯分布。由最大似然估计的性质知,  $\hat{\beta}_{\text{ML}}$  是一个无偏估计, 即其均值等于真实值  $\beta$ ; 而方差则达到 Cramer-Rao 下界, 即

$$\sigma_{\beta}^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{\text{E} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(T|\beta) \right]^2 \right\}} \quad (\text{题 2.10.3})$$

由于

$$\ln f(T|\beta) = (\ln \beta - \beta T)$$

故有

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(T|\beta) = \frac{1}{\beta} - T$$

从而得

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(T|\beta) \right]^2 = \frac{1}{\beta^2} - \frac{2T}{\beta} + T^2 \quad (\text{题 2.10.4})$$

根据概率论知, 故障时间  $T$  的均值和二阶矩分别定义为

$$E\{T\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt$$

和

$$E\{T^2\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_T(t) dt$$

将已知的概率密度分布  $f_T(t)$  代入以上两式, 分别得

$$E\{T\} = \int_0^{\infty} t \beta e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta} \quad (\text{题 2.10.5})$$

$$E\{T^2\} = \int_0^{\infty} t^2 \beta e^{-\beta t} dt = \beta \frac{2}{\beta^3} = \frac{2}{\beta^2} \quad (\text{题 2.10.6})$$

式中使用了积分公式

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (\text{题 2.10.7})$$

将式 (题 2.10.5) 和式 (题 2.10.6) 代入式 (题 2.10.4), 即可得到

$$\begin{aligned} E \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(T|\beta) \right]^2 \right\} &= \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} E\{T\} + E\{T^2\} \\ &= \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} \times \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \end{aligned} \quad (\text{题 2.10.8})$$

然后, 再将式 (题 2.10.8) 代入式 (2.10.3), 又有

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{1}{N} \beta^2 \quad (\text{题 2.10.9})$$

由于对大的  $N$  而言, 最大似然估计  $\hat{\beta}_{\text{ML}}$  为高斯分布, 其数学期望 (即均值) 等于  $\beta$ , 方差等于  $\beta^2/N$ , 故其概率密度函数为

$$f_{\hat{\beta}_{\text{ML}}}(x) = \frac{\sqrt{N}}{2\pi} \exp \left[ -\frac{(x - \beta)^2}{2\beta^2/N} \right] \quad (\text{题 2.10.10})$$

答案:

- (1) 故障率的最大似然估计  $\hat{\beta}_{\text{ML}} = 1/\bar{T}$ , 即等于样本故障时间的倒数。  
 (2) 故障率的最大似然估计  $\hat{\beta}_{\text{ML}} = 1/\bar{T}$  的概率密度函数为高斯分布, 由式 (题 2.10.10) 描述。

题 2.11 首先, 有

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) &= f(y_1 | s, \sigma^2) \cdots f(y_N | s, \sigma^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ - \sum_{i=1}^N (y_i - s)^2 / (2\sigma^2) \right] \end{aligned}$$

由此得似然函数

$$\begin{aligned} L &= \ln f(y_1, \dots, y_N | s, \sigma^2) \\ &= \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

信号  $s$  和噪声方差  $\sigma^2$  的最大似然估计分别由

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s} &= \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)}{\sigma} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} &= -\frac{N}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - s)^2}{(\sigma^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

给出。解之, 得

$$\hat{s}_{\text{ML}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \bar{Y} \quad (\text{题 2.11.1})$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \quad (\text{题 2.11.2})$$

答案: 信号  $s$  的最大似然估计等于接收信号的样本均值  $\bar{Y}$ , 而噪声方差的最大似然估计由式 (题 2.11.2) 给出。

题 2.12 使用均方误差作代价函数, 即

$$J = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\} \quad (\text{题 2.12.1})$$

记  $\bar{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\}$ , 则式 (题 2.12.1) 展开后为

$$\begin{aligned} J &= E\{\mathbf{x}^T \mathbf{x}\} - \hat{\mathbf{x}}^T E\{\mathbf{x}\} - [E\{\mathbf{x}\}]^T \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} \\ &= E\{\mathbf{x}^T \mathbf{x}\} - 2\hat{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{题 2.12.2})$$

求代价函数关于向量  $\hat{\mathbf{x}}$  的导数, 并令其等于零, 得

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = -2\bar{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (\text{题 2.12.3})$$

即

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\} \quad (\text{题 2.12.4})$$

这表明, 未知随机向量  $\mathbf{x}$  的线性均方估计就是它的均值, 即  $\hat{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\}$ .

容易验证这一线性均方估计是无偏估计, 因为估计误差  $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  的期望值

$$\begin{aligned} E\{\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\} &= E\{\hat{\mathbf{x}}\} - E\{\mathbf{x}\} \\ &= \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

答案: 未知随机向量  $\mathbf{x}$  的线性均方估计  $\hat{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\}$ , 它是无偏估计.

题 2.13 由题 2.12 知, 随机变量  $x$  的线性均方估计等于其均值, 故

$$\begin{aligned} \hat{x} &= E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 x dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

答案: 均匀分布的随机变量  $x$  的线性均方估计等于 1/2.

题 2.14 计算接收信号  $y(n)$  的自相关函数, 得

$$R_{ij} = E\{y(i)y(j)\} = E\{[s + v(i)][s + v(j)]\} = E\{s^2\} + E\{v(i)v(j)\}$$

接收信号向量  $\mathbf{y} = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^T$  的相关函数矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} \\ &= \begin{bmatrix} E\{s^2\} + N_0 & E\{s^2\} & \cdots & E\{s^2\} \\ E\{s^2\} & E\{s^2\} + N_0 & \cdots & E\{s^2\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{s^2\} & E\{s^2\} & \cdots & E\{s^2\} + N_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{题 2.14.1})$$

而未知参数  $s$  与接收信号的互相关函数向量为

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} E\{sy(1)\} \\ E\{sy(2)\} \\ \vdots \\ E\{sy(N)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\{s^2\} \\ E\{s^2\} \\ \vdots \\ E\{s^2\} \end{bmatrix} \quad (\text{题 2.14.2})$$

将式 (题 2.14.1) 及式 (题 2.14.2) 代入 2.1.6 节权系数向量的公式 (2.1.35), 立即得

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{g} \\ &= \begin{bmatrix} E\{s^2\} + N_0 & E\{s^2\} & \cdots & E\{s^2\} \\ E\{s^2\} & E\{s^2\} + N_0 & \cdots & E\{s^2\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{s^2\} & E\{s^2\} & \cdots & E\{s^2\} + N_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E\{s^2\} \\ \vdots \\ E\{s^2\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(N + \frac{N_0}{E\{s^2\}}\right)^{-1} \\ \left(N + \frac{N_0}{E\{s^2\}}\right)^{-1} \\ \vdots \\ \left(N + \frac{N_0}{E\{s^2\}}\right)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这表明, 最优权系数为

$$w_i = \frac{1}{N + \frac{N_0}{E\{s^2\}}}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

由此得信号的线性均方估计

$$\hat{s}_{\text{LMS}} = \sum_{i=1}^N w_i y(i) = \frac{1}{N + \frac{N_0}{E\{s^2}\}}} \sum_{i=1}^N y(i) \quad (\text{题 2.14.3})$$

**答案：** 信号  $s$  的线性均方估计由式 (题 2.14.3) 决定。若  $E\{s^2\} \gg N_0$ ，则

$$\hat{s}_{\text{LMS}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(i) = \bar{Y}$$

即信号功率远大于噪声功率时，信号  $s$  的线性均方估计等于接收信号的样本均值。

**题 2.15** 求  $z$  的均值，得

$$\begin{aligned} E\{z\} &= E\left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\} = \sum_{i=1}^n a_i E\{x_i\} \\ &= \mu \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

将已知条件  $E\{z\} = \mu$  代入上式，则有

$$\mu \sum_{i=1}^n a_i = \mu$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \quad (\text{题 2.15.1})$$

直接计算  $z$  的方差，我们有

$$\sigma_z^2 = E\{(z - \mu)^2\} = E\left\{\left[\sum_{i=1}^n a_i x_i - \mu\right]^2\right\}$$

将式 (题 2.15.1) 代入上式，得

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i \mu\right]^2\right\} \\ &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^n a_i (x_i - \mu)\right]^2\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n a_i (x_i - \mu) \sum_{j=1}^n a_j (x_j - \mu)\right\} \end{aligned} \quad (\text{题 2.15.2})$$

由  $x_i$  的相互独立性知  $E\{x_i x_j\} = 0, i \neq j$ , 故式 (题 2.15.2) 可简化为

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= E\left\{\sum_{i=1}^n a_i^2 (x_i - \mu)^2\right\} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 E\{(x_i - \mu)^2\} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\end{aligned}\quad (\text{题 2.15.3})$$

注意, 式中使用了已知条件  $\sigma_i^2 = E\{(x_i - \mu)^2\}$ .

综合式 (题 2.15.1) 和式 (题 2.15.3), 即得到一带约束条件的优化问题:

$$\min(\sigma_z^2) = \min\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right) \quad (\text{题 2.15.4})$$

约束条件为

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \quad (\text{题 2.15.5})$$

这一优化问题很容易用 Lagrange 乘子法求解. 为此, 构造代价函数

$$f(a_1, \dots, a_n; \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i\right) \quad (\text{题 2.15.6})$$

此代价函数为最小的条件是:

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 2a_i \sigma_i^2 - \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{题 2.15.7})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^n a_i = 0 \quad (\text{题 2.15.8})$$

由式 (题 2.15.7) 得  $a_i = (2\sigma_i^2)^{-1} \lambda, i = 1, 2, \dots, n$ , 将这些结果代入式 (题 2.15.8) 即有

$$[(2\sigma_1^2)^{-1} + \dots + (2\sigma_n^2)^{-1}] \lambda = \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

故

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (2\sigma_i^2)^{-1}} \quad (\text{题 2.15.9})$$

再将式 (题 2.15.6) 代入式 (题 2.15.8), 又有

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\lambda}{2\sigma_i^2} = \frac{1}{2\sigma_i^2 \left( \sum_{j=1}^n (2\sigma_j^2)^{-1} \right)} \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2 \left( \sum_{j=1}^n \sigma_j^{-2} \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{题 2.15.10})$$

**答案:** 欲使得  $E\{z\} = \mu$  和  $\sigma_z^2$  最小化, 应该按照式 (题 2.15.10) 选择常数  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**题 2.16** 首先将飞行器的观测方程改写为

$$y_i = \alpha + \beta x_i + w_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{题 2.16.1})$$

其中  $x_i = i$ .

注意到  $\alpha$  和  $\beta$  为常数, 而  $w_i$  的均值为零, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha + \beta x_i + w_i) \\ &= \alpha + \beta \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \end{aligned} \quad (\text{题 2.16.2})$$

或写作

$$\bar{y} = \alpha + \beta \bar{x} \quad (\text{题 2.16.3})$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} i \\ &= \frac{1}{10} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{110}{2} = 5.5 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i \\ &= \frac{1}{10} (1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 9 + 10 + 12 + 13) \\ &= \frac{1}{10} \times 65 = 6.5\end{aligned}$$

分别是  $x$  和  $y$  的样本均值。

从式 (题 2.16.1) 中减去式 (题 2.16.3), 其结果为

$$y_i - \bar{y} = \beta(x_i - \bar{x}) + w_i \quad (\text{题 2.16.4})$$

定义向量

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= [y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots, y_{10} - \bar{y}]^T \\ \mathbf{x} &= [x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_{10} - \bar{x}]^T \\ \mathbf{w} &= [w_1, w_2, \dots, w_{10}]^T\end{aligned}$$

则式 (题 2.16.4) 可写成向量形式:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}\beta + \mathbf{w} \quad (\text{题 2.16.5})$$

用  $\mathbf{x}^T$  左乘式 (题 2.16.5) 两边, 并注意到  $x_i - \bar{x} = i - 5.5$  与随机变量  $w_i$  不相关, 则有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \beta$$

由此得到飞行速度  $\beta$  的最小二乘解

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{LS} &= (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{y} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} \\ &= 1.325\end{aligned} \quad (\text{题 2.16.6})$$

将式 (题 2.16.6) 代入式 (题 2.16.3) 后, 又可得到初始位置  $\alpha$  的最小二乘估计:

$$\hat{\alpha}_{LS} = \bar{y} - \hat{\beta}_{LS} \bar{x} = 6.5 - 1.325 \times 5.5 = -0.7875$$

答案: 飞行器初始位置  $\alpha$  的最小二乘估计值等于  $-0.7875$ .

**题 2.17** 由题给定义式 (题 2.17.6) 可以看出, 类可识别的有效性与类间的可识别性成正比, 与类内的可识别性成反比, 因此, 若使类可识别矩阵  $U$  能够达到最大的类可识别有效性, 则  $U$  是使代价函数  $J(U)$  最大的变元, 即有

$$U = \arg \max J(U) \quad (\text{题 2.17.7})$$

记  $U = [u_1, u_2, \dots, u_Q]^T$ , 则式 (题 2.17.6) 和式 (题 2.17.7) 可合并写作

$$\begin{aligned} u &= \arg \max J(u) = \arg \max \frac{\prod_{i=1}^Q u_i^T S_b u_i}{\prod_{i=1}^Q u_i^T S_w u_i} \\ &= \prod_{i=1}^Q \frac{u_i^T S_b u_i}{u_i^T S_w u_i} \end{aligned} \quad (\text{题 2.17.8})$$

由  $J(u) = \prod_{i=1}^Q J_i(u_i)$  容易看出,  $J(u)$  的最大化等价于所有  $J_i(u_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, Q$  都分别最大化, 即

$$u_i = \arg \max \frac{u_i^T S_b u_i}{u_i^T S_w u_i} \quad (\text{题 2.17.9})$$

这是一个典型的广义 Rayleigh 商问题, 它等价于下面的广义特征值分解:

$$S_b u_i = \lambda_i S_w u_i \quad (\text{题 2.17.10})$$

答案:  $Q \times Q$  维类可识别矩阵  $U$  的每个列向量分别是矩阵束  $\{S_b, S_w\}$  的广义特征向量.

**题 2.18** 将  $v = y - Hx$  代入已知条件式, 可以将观测噪声向量的概率密度函数改写为

$$f(y - Hx) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |R|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (y - Hx)^T R^{-1} (y - Hx) \right]$$

它实质上是给定未知参数  $x$  时观测数据向量  $y$  的似然函数, 即

$$\begin{aligned} f(y|x) &= f(y - Hx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |R|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (y - Hx)^T R^{-1} (y - Hx) \right] \end{aligned}$$

显然, 使这一似然函数最大化等价为使代价函数

$$J = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})$$

最小化。求代价函数关于  $\mathbf{x}$  的偏导数, 并令结果为零, 则有

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = 0$$

从上式可直接得到未知参数向量  $\mathbf{x}$  的最大似然估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{题 2.18.1})$$

很显然, 为了得到最大似然估计, 观测矩阵  $\mathbf{H}$  必须满列秩。计算估计误差向量, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} \\ &= \mathbf{x} - (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}) \\ &= -(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{题 2.18.2})$$

于是, 估计误差的协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} \\ &= \mathbf{E}\left\{(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1}\right\} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}\{\mathbf{v} \mathbf{v}^T\} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \end{aligned}$$

注意到  $\mathbf{E}\{\mathbf{v} \mathbf{v}^T\} = \mathbf{R}$ , 故上式简化为

$$\mathbf{P}_e = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (\text{题 2.18.3})$$

将式 (题 2.18.3) 代入式 (题 2.18.1), 则有

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \mathbf{P}_e \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{题 2.18.4})$$

**答案:** 线性高斯测量情况下的最大似然估计  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}$  由式 (题 2.18.4) 给出。

**题 2.19** 由题意知, 观测矩阵  $\mathbf{H}$  变为向量:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{题 2.19.1})$$

而观测噪声向量的协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{题 2.19.2})$$

将式(题 2.19.1)和式(题 2.19.2)代入题 2.18 的式(题 2.18.3)知,估计误差的协方差矩阵退化为一标量,即有

$$P_e = (\mathbf{h}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h})^{-1} = \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right)^{-1} \quad (\text{题 2.19.3})$$

而  $x$  的最大似然估计

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\text{ML}} &= P_e \mathbf{h}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \\ &= \frac{y_1 \sigma_1^{-2} + y_2 \sigma_2^{-2} + y_3 \sigma_3^{-2}}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2} + \sigma_3^{-2}} \end{aligned} \quad (\text{题 2.19.4})$$

式中  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$  为观测数据向量,其中  $y_1, y_2, y_3$  为随机观测值。

**题 2.20** 由 Kirchhoff 电流定律知  $I_1 + I_2 + I_3 = I$ , 由于  $R_{\text{in}} = \infty$ , 故  $I = 0$ . 对每个电流  $I_i$  使用欧姆定律, 得

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_1 - V}{R_1} + \frac{V_2 - V}{R_2} + \frac{V_3 - V}{R_3} = 0$$

或

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

解之, 得

$$V = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right) \quad (\text{题 2.20.1})$$

有效电阻

$$R = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} \quad (\text{题 2.20.2})$$

另一方面, 由于电压测量值总是存在误差, 而测量误差一般服从高斯分布, 所以图题 2.20 的观测方程为

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{题 2.20.3})$$

与题 2.19 比较知, 电压测量值向量  $y = [V_1, V_2, V_3]^T$ , 电压的最大似然估计具有式 (题 2.19.4) 的形式. 比较式 (题 2.20.1) 和式 (题 2.19.4) 知, 有效电阻  $R$  相当于测量噪声的协方差  $P_e$ , 并且测量误差向量  $e = [E_1, E_2, E_3]^T$  服从高斯分布:

$$e \sim \mathcal{N} \left( 0, \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{题 2.20.4})$$

即电阻  $R_1, R_2, R_3$  分别是电压  $V_1, V_2, V_3$  的测量误差的协方差.

**答案:** 电压  $V$  由式 (题 2.20.1) 表示, 电压  $V_1, V_2, V_3$  的测量误差的协方差分别等于协方差电阻  $R_1, R_2, R_3$ .

**题 2.21** 将加权最小二乘估计  $\hat{\theta}_{\text{WLS}}$  代入观测方差, 得

$$\begin{aligned} y - A\hat{\theta}_{\text{WLS}} &= (A\theta + e) - A \left[ \left( A^T \Sigma^{-1} A \right)^{-1} A^T \Sigma^{-1} (A\theta + e) \right] \\ &= \left[ I_N - A \left( A^T \Sigma^{-1} A \right)^{-1} A^T \Sigma^{-1} \right] e \end{aligned} \quad (\text{题 2.21.1})$$

记

$$U = I_N - A \left( A^T \Sigma^{-1} A \right)^{-1} A^T \Sigma^{-1}$$

则式 (题 2.21.1) 可以简写作

$$y - A\hat{\theta}_{\text{WLS}} = Ue \quad (\text{题 2.21.2})$$

由式 (题 2.21.2) 易得

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-p} (Ue)^T \Sigma^{-1} (Ue) \\ &= \frac{1}{N-p} e^T (U^T \Sigma^{-1} Ue) \\ &= \frac{1}{N-p} \text{tr} \left[ (U^T \Sigma^{-1} Ue) e^T \right] \end{aligned} \quad (\text{题 2.21.3})$$

式中  $\text{tr}(A)$  表示矩阵  $A$  的迹. 容易验证

$$\begin{aligned} U^T \Sigma^{-1} U &= \left[ I_N - A \left( A^T \Sigma^{-1} A \right)^{-1} A^T \Sigma^{-1} \right]^T \Sigma^{-1} \times \\ &\quad \left[ I_N - A \left( A^T \Sigma^{-1} A \right)^{-1} A^T \Sigma^{-1} \right] \\ &= U^T \Sigma^{-1} \end{aligned} \quad (\text{题 2.21.4})$$

将式 (题 2.21.4) 代入式 (题 2.21.3) 得

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p} \text{tr}(\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)$$

从而有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\hat{\sigma}^2\} &= \frac{1}{N-p} \text{tr} \left[ \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{E}\{\mathbf{e} \mathbf{e}^T\} \right] \\ &= \frac{1}{N-p} \text{tr}[\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}] \\ &= \frac{\sigma^2}{N-p} \text{tr}(\mathbf{U}^T) \\ &= \frac{\sigma^2}{N-p} \text{tr}(\mathbf{U}) \end{aligned} \quad (\text{题 2.21.5})$$

计算矩阵的迹, 得

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{U}) &= \text{tr} \left[ \mathbf{I}_N - \mathbf{A} \left( \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right] \\ &= \text{tr}(\mathbf{I}_N) - \text{tr} \left[ \mathbf{A} \left( \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right] \\ &= N - \text{tr} \left[ \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \left( \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \right] \\ &= N - \text{tr}(\mathbf{I}_p) \\ &= N - p \end{aligned} \quad (\text{题 2.21.6})$$

这里利用了矩阵  $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A}$  是  $p \times p$  维矩阵这一事实.

将式 (题 2.21.6) 代入式 (题 2.21.5), 立即得到

$$\mathbf{E}\{\hat{\sigma}^2\} = \sigma^2 \quad (\text{题 2.21.7})$$

这就证明了  $\hat{\sigma}^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计.

**题 2.22** 均方误差定义为

$$J_{\text{MSE}} = \mathbf{E}\{|y - \hat{y}|^2\} \quad (\text{题 2.22.1})$$

由于要使均方误差最小化,  $y$  的估计首先必须是无偏估计, 即要求

$$\mathbf{E}\{y - \hat{y}\} = 0$$

由于  $\hat{y} = \mathbf{w}^H \mathbf{x} + b$ , 所以上式意味着

$$b = m_y - \mathbf{w}^H \mathbf{m}_x \quad (\text{题 2.22.2})$$

式中  $m_y = E\{y\}$  和  $m_x$  分别表示随机变量  $y$  的均值和观测数据向量  $x$  的均值向量。将式 (题 2.22.2) 代入, 得

$$\hat{y} = w^H x + b = w^H(x - m_x) + m_y \quad (\text{题 2.22.3})$$

将式 (题 2.22.3) 代入式 (题 2.22.1), 可得到均方误差的表达式:

$$J_{\text{MSE}} = E \left\{ |(y - m_y) - w^H(x - m_x)|^2 \right\} \quad (\text{题 2.22.4})$$

展开后为

$$\begin{aligned} J_{\text{MSE}} &= E \left\{ [(y - m_y) - w^H(x - m_x)] [(y - m_y) - w^H(x - m_x)]^* \right\} \\ &= E \left\{ |y - m_y|^2 - (y - m_y)(x - m_x)^H w - w^H(x - m_x)(y - m_y)^* + \right. \\ &\quad \left. w^H(x - m_x)(x - m_x)^H w \right\} \end{aligned} \quad (\text{题 2.22.5})$$

定义自协方差矩阵

$$C_x = E \left\{ (x - m_x)(x - m_x)^H \right\} \quad (\text{题 2.22.6})$$

和互协方差向量

$$c_{xy} = E \left\{ (x - m_x)(y - \hat{y})^* \right\} \quad (\text{题 2.22.7})$$

则式 (题 2.22.5) 可简化为

$$J_{\text{MSE}} = \sigma_y^2 - c_{xy}^H w - w^H c_{xy} + w^H C_x w \quad (\text{题 2.22.8})$$

式中  $\sigma_y^2 = E\{|y - m_y|^2\}$  为随机变量  $y$  的方差。

由

$$\frac{\partial J_{\text{MSE}}}{\partial w^*} = -c_{xy} + C_x w = 0$$

得到

$$C_x w = c_{xy} \quad (\text{题 2.22.9})$$

由于协方差矩阵  $C_x$  一般非奇异, 故使均方误差最小化的最优滤波器

$$w_{\text{opt}} = C_x^{-1} c_{xy} \quad (\text{题 2.22.10})$$

将式 (题 2.22.9) 代入式 (题 2.22.8), 并化简, 得

$$J_{\text{MSE}} = \sigma_y^2 - c_{xy}^H w \quad (\text{题 2.22.11})$$

将式 (题 2.22.10) 代入上式, 便得到均方误差的完整表达式

$$J_{\text{MSE}} = \sigma_y^2 - \mathbf{c}_{xy}^H \mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{c}_{xy} \quad (\text{题 2.22.12})$$

答案: 使均方误差最小化的最优滤波器

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{c}_{xy}$$

而最小均方误差

$$J_{\text{MSE}} = \sigma_y^2 - \mathbf{c}_{xy}^H \mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{c}_{xy}$$

题 2.23 由

$$\mathbf{m}_v = \begin{bmatrix} \text{E}\{y\} \\ \text{E}\{x_1\} \\ \text{E}\{x_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

知

$$\mathbf{m}_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad m_y = \frac{1}{4} \quad (\text{题 2.23.1})$$

又因为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_v &= \text{E}\{(\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)(\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)^T\} \\ &= \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yx_1} & C_{yx_2} \\ C_{x_1y} & C_{x_1x_1} & C_{x_1x_2} \\ C_{x_2y} & C_{x_2x_1} & C_{x_2x_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故若令  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ , 则

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} C_{x_1x_1} & C_{x_1x_2} \\ C_{x_2x_1} & C_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \quad (\text{题 2.23.2})$$

$$\mathbf{c}_{xy} = \begin{bmatrix} C_{x_1y} \\ C_{x_2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad (\text{题 2.23.3})$$

$$\sigma_y^2 = C_{yy} = \frac{7}{10} \quad (\text{题 2.23.4})$$

将式 (题 2.23.2) ~ 式 (题 2.23.4) 代入题 2.22 中的式 (题 2.22.9) 得

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

其解为

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{题 2.23.5})$$

又由题 2.22 中的式 (题 2.22.2) 得

$$b = m_y - \mathbf{w}^H \mathbf{m}_x = \frac{1}{4} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \quad (\text{题 2.23.6})$$

将式 (题 2.23.5) 和式 (题 2.23.6) 代入题 2.22 中的式 (题 2.22.3), 立即有

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \mathbf{w}^H (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) + m_y \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (\text{题 2.23.7})$$

最后, 由式 (题 2.22.11) 得

$$J_{\text{MSE}} = \sigma_y^2 - \mathbf{c}_{xy}^H \mathbf{w} = \frac{7}{10} - \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{5}$$

**答案:**  $y$  的线性均方估计为

$$\hat{y} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}$$

最小均方误差

$$J_{\text{MSE}} = \frac{3}{5}$$

## 第 3 章 现代谱估计

本章包括现代功率谱估计的一些主要方法:

- ARMA 谱估计是以信号的差分模型为基础的现代谱估计;
- Burg 的最大熵谱估计是来源于信息论的现代谱估计, 它在不同的约束条件下, 分别与 AR 谱估计和 ARMA 谱估计等价;
- Pisarenko 谐波分解是一种以谐波信号为特定对象的谱估计方法, 它将谐波频率的估计转化为信号相关矩阵的特征值分解;
- 扩展 Prony 方法是一种利用复谐波模型拟合复信号的方法;
- MUSIC 方法是一种估计信号空间参数的现代谱估计方法, 它将功率谱推广为空间谱, 是最早问世的子空间方法;
- ESPRIT 方法是一种估计信号空间参数的旋转不变技术, 虽然未使用任何谱的概念, 但却可以达到谐波频率估计的目的. 其基本思想是将谐波频率的估计转变为矩阵束的广义特征值分解.

### 3.1 主要理论与方法

离散过程  $x(n)$  和  $y(n)$  的互相关函数  $R_{xy}(n_1, n_2)$  与互协方差函数  $C_{xy}(n_1, n_2)$  分别定义为

$$R_{xy}(n_1, n_2) \stackrel{\text{def}}{=} E\{x(n_1)y^*(n_2)\} \quad (3.1.1)$$

$$C_{xx}(n_1, n_2) \stackrel{\text{def}}{=} E\{[x(n_1) - \mu_x(n_1)][y(n_2) - \mu_y(n_2)]^*\} \quad (3.1.2)$$

$$= R_{xy}(n_1, n_2) - \mu_x(n_1)\mu_y^*(n_2) \quad (3.1.3)$$

平稳离散过程  $x(n)$  的功率谱密度定义为自协方差函数的 Fourier 级数, 即

$$P_{xx}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{xx}(k)e^{-jkT\omega} \quad (3.1.4)$$

而平稳离散过程  $x(n)$  和  $y(n)$  的互功率谱定义为

$$P_{xy}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{xy}(k)e^{-jkT\omega} \quad (3.1.5)$$

### 3.1.1 非参数化功率谱估计

假定  $N$  个数据  $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$  已零均值化。

#### 1. 直接法

先计算  $N$  个数据的 Fourier 变换 (即频谱)

$$X_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega} \quad (3.1.6)$$

再取频谱和其共轭的乘积, 得到功率谱

$$P_x(\omega) = \frac{1}{N}|X_N(\omega)|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (3.1.7)$$

#### 2. 间接法

先计算样本相关函数

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+k)x^*(n), \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (3.1.8)$$

其中  $1 \ll M < N$ , 且  $\hat{R}_x(-k) = \hat{R}_x^*(k)$ 。再计算样本自相关函数的 Fourier 变换, 得到功率谱

$$P_x(\omega) = \sum_{k=-M}^M \hat{R}_x(k)e^{-jk\omega} \quad (3.1.9)$$

直接法和间接法求得的功率谱统称周期图。

#### 3. 修正周期图

$$P_x(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{NW} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)c(n)e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (3.1.10)$$

式中

$$W = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |c(n)|^2 = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} |C(\omega)|^2 d\omega \quad (3.1.11)$$

这里  $C(\omega)$  是窗函数  $c(n)$  的 Fourier 变换。

## 4. Blackman-Tukey 方法 (周期图平滑法)

$$P_{\text{BT}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-M}^M \hat{R}_x(k) w(k) e^{-jk\omega} \quad (3.1.12)$$

下面是几种常用的窗函数:

Hanning 窗

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Hamming 窗

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Blackman 窗

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.1.15)$$

## 3.1.2 ARMA 谱估计

ARMA 过程:

$$x(n) + \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) = e(n) + \sum_{j=1}^q b_j e(n-j) \quad (3.1.16)$$

式中  $e(n)$  为高斯白噪声, 其均值为零, 方差为  $\sigma_e^2$ .

功率谱公式:

$$P_x(\omega) = \sigma_e^2 \frac{|1 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_q e^{-j\omega q}|^2}{|1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_p e^{-j\omega p}|^2} \quad (3.1.17)$$

## 1. Cadzow 谱估计子

$$P_x(\omega) = \frac{1 + n_1 e^{-j\omega} + \dots + n_p e^{-j\omega p}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_p e^{-j\omega p}} + \frac{1 + n_1 e^{j\omega} + \dots + n_p e^{j\omega p}}{1 + a_1 e^{j\omega} + \dots + a_p e^{j\omega p}} \quad (3.1.18)$$

式中

$$n_k = \sum_{i=0}^p a_i \rho(k-i), \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (3.1.19)$$

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} R_x(0), & k = 0 \\ R_x(k), & \text{其他} \end{cases} \quad (3.1.20)$$

其中  $R_x(k)$  是 ARMA 过程  $\{x(n)\}$  的相关函数。

## 2. Kaveh 谱估计子

$$P_x(\omega) = \frac{\sum_{k=-q}^q c_k e^{-j\omega k}}{|1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_p e^{-j\omega p}|^2} \quad (3.1.21)$$

式中

$$c_k = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p a_i a_j^* R_x(k-i+j), \quad k = 0, 1, \dots, q \quad (3.1.22)$$

## 3. 稳定系统

有界输入一定导致有界输出的线性系统称为稳定系统。一稳定系统的充分必要条件是：其 AR 多项式  $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}$  的根没有一个位于单位圆上。稳定系统的冲激响应是绝对可求和的。

## 4. 因果系统

AR 多项式  $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}$  的根全部位于单位圆内的线性系统被称为因果系统。因果系统的冲激响应  $h(t) = 0, t < 0$ ，即系统的输出一定产生在输入激励之后。

## 5. 最小相位系统

MA 多项式  $B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}$  的根全部位于单位圆内的线性系统被称为最小相位系统。

## 6. 修正 Yule-Walker 方程

一个因果 ARMA 模型的 AR 参数服从修正 Yule-Walker 方程

$$R_x(l) + \sum_{i=1}^p a_i R_x(l-i) = 0, \quad \forall l > q \quad (3.1.23)$$

7. 求解超定矩阵方程  $Ax = b$  的奇异值分解 — 总体最小二乘 (SVD-TLS) 算法

算法 3.1.1 SVD-TLS 算法

步骤 1 计算增广矩阵  $B = [-b, A]$  的奇异值分解  $B = U\Sigma V^H$ , 并存储奇异值和矩阵  $V$ .

步骤 2 确定增广矩阵  $B$  的有效秩  $p$ .

步骤 3 计算矩阵

$$S^{(p)} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n+1-p} \sigma_{jj}^2 v_j^i (v_j^i)^H \quad (3.1.24)$$

式中

$$v_j^i = [v(i, j), v(i+1, j), \dots, v(i+p, j)]^T \quad (3.1.25)$$

其中  $v(i, j)$  是矩阵  $V$  的第  $i$  行、第  $j$  列的元素。

步骤 4 求  $S^{(p)}$  的逆矩阵  $S^{-(p)}$ , 并计算未知参数的总体最小二乘估计

$$\hat{x}_{i, \text{TLS}} = S^{-(p)}(i+1, 1) / S^{-(p)}(1, 1), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.1.26)$$

式中  $S^{-(p)}(i, j)$  是逆矩阵  $S^{-(p)}$  的第  $(i, j)$  元素。

### 3.1.3 MA 阶数确定与参数估计

#### 1. MA 阶数确定

假定 ARMA( $p, q$ ) 模型的 AR 阶数  $p$  已经确定, 定义  $(p+1) \times (p+1)$  维矩阵

$$R_{1e} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} R_x(q_e) & R_x(q_e - 1) & \cdots & R_x(q_e - p) \\ R_x(q_e + 1) & R_x(q_e) & \cdots & R_x(q_e - p + 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(q_e + p) & R_x(q_e + p - 1) & \cdots & R_x(q_e) \end{bmatrix} \quad (3.1.27)$$

则当  $q_e > q$  时  $\text{rank}(R_{1e}) = p$ , 而且仅当  $q = p$  时才有  $\text{rank}(R_{1e}) = p + 1$ .

#### 2. 算法 3.1.2 非最小相位系统 MA 参数估计的 Newton-Raphson 算法

初始化 利用式 (3.1.22) 计算 MA 谱系数  $c_k, k = 0, 1, \dots, q$ , 并令初始值  $b_0^{(0)} = \sqrt{c_0}, b_j^{(0)} = 0, j = 1, 2, \dots, q$  和迭代步数  $j = 0$ .

步骤 1 计算拟合误差函数

$$f_k^{(i)} = \sum_{j=0}^q b_j^{(i)} b_{j+k}^{(i)} - c_k, \quad k = 0, 1, \dots, q \quad (3.1.28)$$

构造

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0^{(i)}}{\partial b_0^{(i)}} & \frac{\partial f_0^{(i)}}{\partial b_1^{(i)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(i)}}{\partial b_q^{(i)}} \\ \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial b_0^{(i)}} & \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial b_1^{(i)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial b_q^{(i)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q^{(i)}}{\partial b_0^{(i)}} & \frac{\partial f_q^{(i)}}{\partial b_1^{(i)}} & \cdots & \frac{\partial f_q^{(i)}}{\partial b_q^{(i)}} \end{bmatrix}$$

步骤 2 更新 MA 参数向量  $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_q]^T$  的估计值:

$$\mathbf{b}^{(i+1)} = \mathbf{b}^{(i)} - F^{-1} \mathbf{f}^{(i)}$$

式中  $F^{-1}$  是矩阵  $F$  在第  $i$  次迭代中的矩阵  $F^{(i)}$  的逆矩阵, 且  $\mathbf{f} = [f_0, f_1, \dots, f_q]^T$ .

步骤 3 若 MA 参数估计向量收敛, 则停止迭代, 输出 MA 参数估计结果; 否则, 令  $i \leftarrow i + 1$ , 并返回步骤 1, 重复以上步骤, 直至 MA 参数估计收敛。

### 3.1.4 最大熵谱估计

#### 1. 信息量

以概率  $p_k$  发生的事件  $X = x_k$  发生后, 能够得到的信息量定义为

$$I(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} I(X = x_k) = \log \left( \frac{1}{p_k} \right) = -\log p_k \quad (3.1.29)$$

信息量的性质:

(1) 肯定发生的事件不含任何信息, 即

$$I(x_k) = 0, \quad \forall p_k = 1$$

(2) 信息量是非负的, 即

$$I(x_k) \geq 0, \quad 0 < p_k < 1$$

(3) 概率越小的事件发生时, 我们从中得到的信息越多, 即

$$I(x_k) > I(x_i), \quad \text{若 } p_k < p_i$$

#### 2. 互信息

两个随机变量  $x_i$  和  $y_j$  之间的互信息定义为

$$I(x_i, y_j) = \log \frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)} \quad (3.1.30)$$

令  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  和  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  表示两个随机变量组, 则它们之间的平均互信息定义为

$$I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \quad (3.1.31)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(x_i|y_j) \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} \quad (3.1.32)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \quad (3.1.33)$$

式中  $p(x_i, y_j)$  是随机变量  $x_i$  和  $y_j$  的联合概率分布, 而  $p(x_i|y_j)$  是已知  $y_j$  情况下  $x_i$  的条件概率分布, 而  $p(y_j|x_i)$  是已知  $x_i$  情况下  $y_j$  的条件概率分布。

互信息的性质:

- (1)  $I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \geq 0$ ;
- (2)  $I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = I(\mathbf{y}; \mathbf{x})$ ;
- (3)  $I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = 0$ , 若  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  独立。

### 3. 熵

考察离散随机变量  $X$ , 其取值的字符集为  $\mathcal{X}$ 。令随机变量  $X$  取值  $x_k$  的概率为  $p_k = \Pr\{X = x_k\}, x_k \in \mathcal{X}$ 。

信息量  $I(x)$  在字符集合  $\mathcal{X}$  内的平均值称为离散随机变量  $X$  的熵, 记作  $H(X)$ , 定义为

$$H(X) \stackrel{\text{def}}{=} E\{I(x)\} = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} p_k I(x_k) = - \sum_{x_k \in \mathcal{X}} p_k \log p_k \quad (3.1.34)$$

或

$$H(X) \stackrel{\text{def}}{=} E\{I(x)\} = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad p_i \stackrel{\text{def}}{=} p(x_i) \quad (3.1.35)$$

### 4. 谱熵定义

$$H[P(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P(\omega) d\omega \quad (3.1.36)$$

### 5. Fejer-Riesz 定理

若

$$W(z) = \sum_{k=-p}^p \mu_k z^{-k} \quad \text{和} \quad W(e^{j\omega}) \geq 0 \quad (3.1.37)$$

则可以找到一函数

$$A(z) = \sum_{i=0}^p a(i) z^{-i} \quad (3.1.38)$$

使得

$$W(e^{j\omega}) = |A(e^{j\omega})|^2 \quad (3.1.39)$$

并且若限制  $A(z) = 0$  的根全部在单位圆内, 则函数  $A(z)$  是惟一确定的。

### 6. 最大熵谱估计

在自相关匹配条件

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\omega) e^{j\omega m} d\omega, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M \quad (3.1.40)$$

约束下, 使谱熵  $H[P(\omega)]$  最大的功率谱  $P(\omega)$  称为最大熵谱估计。根据 Fejer-Riesz 定理, 这一最大熵谱估计等价于 AR 谱估计。

在自相关匹配

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\omega) e^{j\omega m} d\omega, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M \quad (3.1.41)$$

和倒谱匹配

$$\hat{c}_x(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P(\omega) e^{j\omega l} d\omega, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \quad (3.1.42)$$

约束下, 使谱熵  $H[P(\omega)]$  最大的最大熵谱估计等价于 ARMA 谱估计。

### 7. 前向预测滤波器

$x(n)$  的  $m$  阶前向线性预测记为  $\hat{x}(n)$ , 定义为

$$\hat{x}(n) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i=1}^m a_m(i) x(n-i) \quad (3.1.43)$$

式中  $a_m(i)$  表示  $m$  阶预测器的第  $i$  个系数。

### 8. 后向预测滤波器

$$\hat{x}(n-m) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i=1}^m a_m^*(i) x(n-m+i) \quad (3.1.44)$$

称为  $x(n)$  的  $m$  阶后向线性预测, 式中  $a_m^*(i)$  是  $a_m(i)$  的复数共轭。

### 9. 算法 3.1.3 前向预测滤波器系数的 Levinson 递推算法 (上推)

$$a_m(i) = a_{m-1}(i) + K_m a_{m-1}^*(m-i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.1.45)$$

$$a_m(m) = K_m \quad (3.1.46)$$

$$P_m = (1 - |K_m|^2) P_{m-1} \quad (3.1.47)$$

初始值

$$P_0 = R_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x(n)|^2 \quad (3.1.48)$$

10. 算法 3.1.4 前向预测滤波器系数的 Levinson 递推算法 (下推)

$$a_m(i) = \frac{1}{1 - |K_{m+1}|^2} [a_{m+1}(i) - K_{m+1} a_{m+1}(m - i + 1)] \quad (3.1.49)$$

$$K_m = a_m(m) \quad (3.1.50)$$

$$P_m = \frac{1}{1 - |K_{m+1}|^2} P_{m+1} \quad (3.1.51)$$

式中  $i = 1, 2, \dots, m$ .

11. 算法 3.1.5 Burg 算法

步骤 1 计算预测误差功率的初始值

$$P_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x(n)|^2$$

和前、后向预测误差的初始值

$$f_0(n) = g_0(n) = x(n)$$

并令  $m = 1$ .

步骤 2 求反射系数

$$K_m = \frac{- \sum_{n=m+1}^N f_{m-1}(n) g_{m-1}^*(n-1)}{\frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^N [ |f_{m-1}|^2 + |g_{m-1}(n-1)|^2 ]}$$

步骤 3 计算前向预测滤波器系数

$$a_m(i) = a_{m-1}(i) + K_m a_{m-1}^*(m - i), \quad i = 1, 2, \dots, m - 1$$

$$a_m(m) = K_m$$

步骤 4 计算预测误差功率

$$P_m = (1 - |K_m|^2) P_{m-1}$$

步骤5 计算滤波器输出

$$\begin{aligned} f_m(n) &= f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1) \\ g_m(n) &= K_m^* f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \end{aligned}$$

步骤6 令  $m \leftarrow m+1$ , 并重复步骤2至步骤5, 直到预测误差功率  $P_m$  不再明显减小.

### 3.1.5 Pisarenko 谐波分解法

考查加性白噪声中的  $p$  个实谐波过程

$$y(n) = \sum_{i=1}^p A_i \sin(2\pi f_i n + \theta_i) + v(n) \quad (3.1.52)$$

式中  $\theta_i$  是在  $[-\pi, \pi]$  均匀分布的随机数,  $v(n)$  为加性高斯白噪声, 其均值为0, 方差为  $\sigma_v^2$ .

$p$  个谐波频率由特征多项式

$$1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{2p-1} z^{-(2p-1)} + z^{-2p} = 0 \quad (3.1.53)$$

的根  $z = e^{\pm j 2\pi f_i}$ ,  $i = 1, 2, \cdots, p$  决定, 式中  $a_i = a_{2p-i}$ ,  $i = 0, 1, \cdots, p$ .

系数向量  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_{2p}]^T$  由

$$\mathbf{R}_y \mathbf{a} = \sigma_v^2 \mathbf{a} \quad (3.1.54)$$

确定, 式中

$$\mathbf{R}_y = E\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^T(n)\} = \begin{bmatrix} R_y(0) & R_y(-1) & \cdots & R_y(-2p) \\ R_y(1) & R_y(0) & \cdots & R_y(-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y(2p) & R_y(2p-1) & \cdots & R_y(0) \end{bmatrix} \quad (3.1.55)$$

也可以把观测过程  $\{y(n)\}$  视为一 ARMA(2p, 2p) 的特殊过程, 通过求解修正 Yule-Walker 方程, 确定 AR 参数  $a_1, a_2, \cdots, a_{2p}$ .

### 3.1.6 扩展 Prony 方法

考查使用复指数模型

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^p b_i z_i^n, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1 \quad (3.1.56)$$

逼近信号  $x(n)$ 。

算法 3.1.6 扩展 Prony 算法

步骤 1 计算样本函数

$$r(i, j) = \sum_{n=p}^{N-1} x(n-j)x^*(n-i), \quad i, j = 0, 1, \dots, p$$

构造扩展阶矩阵

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} r(1, 0) & r(1, 1) & \cdots & r(1, p_e) \\ r(2, 0) & r(2, 1) & \cdots & r(2, p_e) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(p_e, 0) & r(p_e, 1) & \cdots & r(p_e, p_e) \end{bmatrix}, \quad p_e \gg p$$

步骤 2 用 SVD-TLS 算法确定矩阵  $\mathbf{R}_e$  的有效秩  $p$  以及系数  $a_1, a_2, \dots, a_p$  的总体最小二乘估计。

步骤 3 求特征多项式

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p} = 0$$

的根  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , 并计算

$$\hat{x}(n) = - \sum_{i=1}^p a_i \hat{x}(n-i), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中  $\hat{x}(0) = x(0)$ 。

步骤 4 求参数向量  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_p]^T$  的最小二乘解

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \hat{\mathbf{x}}$$

式中  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}(0), \hat{x}(1), \dots, \hat{x}(N-1)]^T$ , 且

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}$$

步骤5 用下式计算幅值  $A_i$ 、相位  $\theta_i$ 、频率  $f_i$  和衰减因子  $\alpha_i$ ：

$$\left. \begin{aligned} A_i &= |b_i| \\ \theta_i &= \arctan[\operatorname{Im}(b_i)/\operatorname{Re}(b_i)]/(2\pi\Delta t) \\ \alpha_i &= \ln |z_i|/\Delta t \\ f_i &= \arctan[\operatorname{Im}(z_i)/\operatorname{Re}(z_i)]/(2\pi\Delta t) \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

### 3.1.7 阵列信号处理

使用等距线阵接收  $p$  个远场信号  $s_1(n), s_2(n), \dots, s_p(n)$ 。

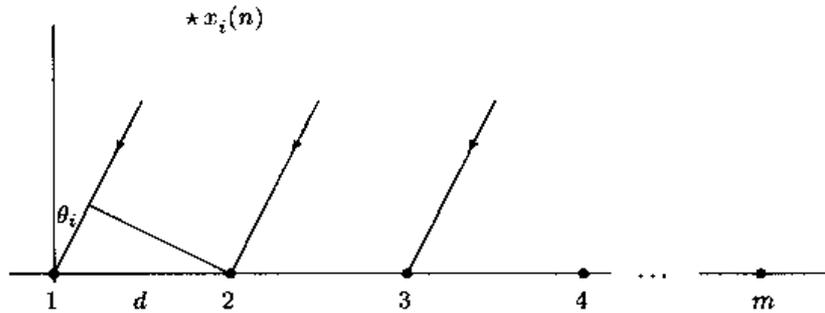


图 3.1.1 等距线阵与远场信号  $s_i(n)$

信号源波达方向 (角)  $\theta_i$  与信号到达相邻阵元的相位差  $\omega_i$  之间存在关系

$$\omega_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_i \quad (3.1.57)$$

式中  $\lambda$  为信号波长,  $d$  是两个相邻阵元之间的距离, 满足“半波长”条件  $d \leq \lambda/2$ 。

#### 1. 波达方向估计

根据  $m$  个阵元上接收的观测数据向量  $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T$ , 设计一波束形成器  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$ , 使它只输出期望信号, 而拒绝其他所有信号。

最小输出能量准则: 使波束形成器在  $N$  次快拍的输出能量的平均值为最小, 即

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |z(n)|^2 = \min_{\mathbf{w}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)|^2 \quad (3.1.58)$$

令第  $k$  个信号  $s_k(n)$  为期望信号, 若波束形成器满足

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega_k) = 1 \quad (\text{波束形成条件}) \quad (3.1.59)$$

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega_i) = 0, \quad \omega_i \neq \omega_k \quad (\text{零点形成条件}) \quad (3.1.60)$$

则该波束形成器将只抽取期望信号  $s_k(n)$ , 而拒绝所有其他干扰信号, 因为波束形成器输出能量为

$$E\{|z(n)|^2\} = E\{|s_k(n)|^2\} + \sigma^2|w|^2 \quad (3.1.61)$$

### 2. Capon 的最小方差无畸变响应 (MVDR) 波束形成器

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_k)}{\mathbf{a}^H(\omega_k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_k)} \quad (3.1.62)$$

### 3. 空间谱

Capon 定义

$$P_{\text{Capon}}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega_k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_k)} \quad (3.1.63)$$

为空间信号的谱, 称之为空间谱。这是因为, 其峰值相对应的  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$  给出  $p$  个信号的空间参数 (波达方向) 的估计。

#### 3.1.8 信号子空间与噪声子空间

观测数据向量  $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T$  的相关矩阵  $\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}$  的特征值分解

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^H \quad (3.1.64)$$

式中  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2)$ 。

#### 1. 子空间

给定向量组  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p \in C^m$  ( $m$  维复数空间), 则这些向量的所有线性组合的集合称为由向量组合  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\}$  张成的子空间, 或称作  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\}$  的张成或闭包, 即

$$\text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\} = \text{close}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\} = \left\{ \sum_{j=1}^p \beta_j \mathbf{x}_j : \beta_j \in C \right\} \quad (3.1.65)$$

#### 2. 观测空间、信号子空间、噪声子空间

观测数据向量  $\mathbf{x}(n)$  的相关矩阵  $\mathbf{R}_{xx}$  所有列向量张成的子空间称为观测空间, 且

$$\text{观测空间} = \text{信号子空间} + \text{噪声子空间} \quad (3.1.66)$$

其中, 信号子空间由特征矩阵  $\mathbf{U}$  中与主特征值对应的列向量张成, 噪声子空间由其他所有列向量张成。

由于酉矩阵  $U$  的两个不同分块矩阵相互正交, 所以这两个分块矩阵的列向量所张成的信号子空间和噪声子空间正交。在这个意义上, 式 (3.1.66) 所示的观测空间的分解是一种典型的正交分解。

### 3. 信号子空间与噪声子空间的几何解释

令  $U = [S \mid G]$ , 其中  $S$  和  $G$  的列向量分别张成信号子空间和噪声子空间, 则

$$GG^H = I - SS^H = I - P_s \quad (3.1.67)$$

即噪声子空间可视为信号子空间的正交投影。

## 3.1.9 多重信号分类 (MUSIC)

### 1. 空间谱 (MUSIC 谱)

定义空间谱

$$P(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega)GG^H\mathbf{a}(\omega)} \quad (3.1.68)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega)(I - SS^H)\mathbf{a}(\omega)} \quad (3.1.69)$$

则空间谱的谱峰对应的  $\omega$  给出信号波达方向角。式 (3.1.68) 和式 (3.1.69) 分别为噪声子空间方法和信号子空间方法。这两种方法并无实质的区别, 只是计算量大小的不同而已。

### 2. 算法 3.1.7 改进的 MUSIC 算法

步骤 1 计算样本自相关矩阵  $R_{xx}$  的特征值分解, 得到其主特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  和次特征值  $\sigma^2$ , 并存储主特征向量  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_p$ 。

步骤 2 计算改进的 MUSIC 谱

$$P(\omega_i) = \frac{\mathbf{a}^H \hat{U} \mathbf{a}(\omega_i)}{\mathbf{a}^H(\omega_i)GG^H\mathbf{a}(\omega_i)} \quad (3.1.70)$$

式中  $\omega_i = (i-1)\Delta\omega$ , 网格  $\Delta\omega$  可取作  $2\pi \cdot 0.001$  等; 且

$$\hat{U} = \sigma^2 \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{(\sigma^2 - \lambda_k)^2} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H \quad (3.1.71)$$

步骤 3 找出  $P(\omega)$  在整个  $\omega$  轴上的  $p$  个峰值, 它们就是待求的 MUSIC 参数估计值  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ 。

3. MUSIC 算法的估计性能<sup>[38]</sup>

(1) 特征向量的估计误差  $(\hat{s}_i - s_i)$  为渐近 (对于大样本  $N$ ) 联合高斯分布, 其均值等于零;

(2) MUSIC 参数估计误差  $(\hat{\omega}_i - \omega_i)$  为渐近联合高斯分布, 其均值等于零;

(3) 若函数  $r(\omega) = \mathbf{a}(\omega)\hat{U}\mathbf{a}(\omega)$  满足正则条件  $r(\omega_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, p$ , 则使式 (3.1.68) 或式 (3.1.70) 最大化得到的参数估计值  $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \dots, \hat{\omega}_p$  具有相同的渐近分布。

## 4. 求根 MUSIC 方法

定义求根 MUSIC 多项式

$$p(z) = z^{L-1} \mathbf{p}^T(z^{-1}) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{p}(z) \quad (3.1.72)$$

式中  $\mathbf{p}(z) = [1, z, \dots, z^{L-1}]^T$ .

求出多项式  $p(z)$  的根, 即可获得波达方向估计

$$\hat{\theta}_m = \arccos \left[ \frac{1}{kd} \arg(\hat{z}_m) \right], \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.1.73)$$

求根 MUSIC 方法可理解为先求多项式的根, 再进行 MUSIC 参数估计的一种方法。

## 3.1.10 旋转不变技术 (ESPRIT)

考查白噪声中的  $p$  个谐波信号

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{i=1}^p s_i(n) e^{jn\omega_i} + w(n) \quad (3.1.74)$$

式中  $s_i(n)$  和  $\omega_i \in (-\pi, \pi)$  分别为第  $i$  个谐波信号的幅值和频率;  $w(n)$  是一零均值、方差为  $\sigma^2$  的复值高斯白噪声过程。

定义

$$\mathbf{a}(\omega_k) = [1, e^{-j\omega_k}, \dots, e^{-j\omega_k(m-1)}]^T \quad (3.1.75)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\omega_1), \mathbf{a}(\omega_2), \dots, \mathbf{a}(\omega_p)] \quad (3.1.76)$$

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T \quad (3.1.77)$$

$$\mathbf{y}(n) = [x_1(n+1), x_2(n+1), \dots, x_m(n+1)]^T \quad (3.1.78)$$

则

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.1.79)$$

$$\mathbf{R}_{xy} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{y}^H(n)\} = \mathbf{A} \mathbf{P} \Phi^H \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{Z} \quad (3.1.80)$$

式中

$$P = E\{s(n)s^H(n)\} \quad (3.1.81)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.82)$$

$$\Phi = \text{diag}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_p}) \quad (3.1.83)$$

因此, 信号参数  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$  的估计变成了旋转矩阵  $\Phi$  的估计。

算法 3.1.8 基本 ESPRIT 算法 1<sup>[34]</sup>

步骤 1 用观测数据向量  $x(1), x(2), \dots, x(N)$  估计相关函数  $R_{xx}(0), R_{xx}(1), \dots, R_{xx}(m)$ 。

步骤 2 由估计的自相关函数构造  $m \times m$  自相关矩阵  $R_{xx} = [R_{xx}^*(j-i)]_{i,j=1}^m$  和  $m \times m$  互相关矩阵  $R_{xy} = [R_{xx}^*(j-i+1)]_{i,j=1}^m$ 。

步骤 3 求  $R_{xx}$  的特征值分解。对于  $m > p$ , 最小特征值为噪声方差  $\sigma^2$  的估计。

步骤 4 利用  $\sigma^2$  计算  $C_{xx} = R_{xx} - \sigma^2 I$  和  $C_{xy} = R_{xy} - \sigma^2 Z$ 。

步骤 5 求矩阵束  $\{C_{xx}, C_{xy}\}$  的广义特征值分解, 得到位于单位圆上的  $p$  个广义特征值  $e^{j\omega_i}, i = 1, 2, \dots, p$ , 它们直接给出谐波频率或由

$$\theta_i = \frac{\lambda}{2\pi d} \arcsin\left(\frac{\omega_i \lambda}{2\pi d}\right) \quad (3.1.84)$$

估计波达方向。

基本 ESPRIT 算法本质上是一种信号参数估计的最小二乘方法。若采用总体最小二乘方法, 则 ESPRIT 参数估计的精度将明显提高。

算法 3.1.9 总体最小二乘 (TLS)-ESPRIT 算法<sup>[50]</sup>

步骤 1 利用基本 ESPRIT 算法 1 的步骤 1~ 步骤 4 得到矩阵  $C_{xx}$  和  $C_{xy}$ 。

步骤 2 求矩阵  $C_{xx} = U \Sigma V^H$  的奇异值分解, 确定其有效秩, 并存储与  $p$  个主奇异值对应的  $\Sigma_1, U_1$  和  $V_1$ 。

步骤 3 计算  $U_1^H C_{xy} V_1$ 。

步骤 4 求矩阵束  $\{\Sigma_1, U_1^H C_{xy} V_1\}$  的广义特征值分解, 得到单位圆上的广义特征值, 它们直接给出谐波频率或通过式 (3.1.57) 确定波达方向。

下面是基本 ESPRIT 算法的另一种形式。

### 算法 3.1.10 基本 ESPRIT 算法 2

步骤 1 计算阵列协方差矩阵  $R_{xx}$  的特征值分解  $R_{xx} = U \Sigma U^H$ .

步骤 2 矩阵  $U$  与  $R_{xx}$  的  $p$  个主特征值对应的部分组成  $U_s$ .

步骤 3 抽取  $\hat{U}_s$  的前面  $m-1$  行组成矩阵  $\hat{U}_1$ , 后面  $m-1$  行组成矩阵  $\hat{U}_2$ . 计算  $\Psi = (\hat{U}_1^H \hat{U}_1)^{-1} \hat{U}_1^H \hat{U}_2$  的特征值分解, 其特征值与  $\hat{\Phi}$  的特征值相同, 为  $e^{j\omega_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), 它们给出估计值  $\hat{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ).

步骤 4 应用公式 (3.1.57) 求波达方向估计  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ .

### 3.1.11 酉 ESPRIT

考查  $m \times N$  观测数据矩阵

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)] \quad (3.1.85)$$

其中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T$  是  $m$  个阵元的观测信号组成的观测数据向量.

定义实交换矩阵

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \in R^{m \times m} \quad (3.1.86)$$

中心复共轭对称矩阵在酉 ESPRIT 方法中起着重要的作用.

复矩阵  $M$  称为中心复共轭对称矩阵, 若

$$\mathbf{H}_p M^* \mathbf{H}_q = M \quad (3.1.87)$$

典型例子

由复观测数据矩阵  $\mathbf{X}$  构造中心复共轭对称矩阵

$$\mathbf{M} = [\mathbf{X}, \mathbf{H}_m \mathbf{X}^* \mathbf{H}_N] \in C^{m \times 2N} \quad (3.1.88)$$

这一中心复共轭对称矩阵通过双射映射, 可以变成实矩阵

$$\mathcal{T}(\mathbf{M}) = \mathbf{Q}_m^H [\mathbf{X}, \mathbf{H}_m \mathbf{X}^* \mathbf{H}_N] \mathbf{Q}_{2N} \quad (3.1.89)$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{g}^T \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.90)$$

$$\mathbf{Q}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & j\mathbf{I}_N \\ \mathbf{H}_N & -j\mathbf{H}_N \end{bmatrix} \quad (3.1.91)$$

$$\mathbf{Q}_{2N+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & 0 & j\mathbf{I}_N \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{H}_N & 0 & -j\mathbf{H}_N \end{bmatrix} \quad (3.1.92)$$

注: 复子矩阵  $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$  具有相同的维数。若复观测数据矩阵  $\mathbf{X}$  的行数为偶数, 则行向量  $\mathbf{g}^T$  将不出现在式 (3.1.91) 中。

算法 3.1.11 酉 ESPRIT 算法

给定  $m$  个阵元的观测数据  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), t = 1, 2, \dots, N$ 。

步骤 1 利用式 (3.1.85) 构造  $m \times N$  复观测数据矩阵  $\mathbf{X}$ 。

步骤 2 根据式 (3.1.91) 对观测数据矩阵  $\mathbf{X}$  进行分块, 计算实矩阵

$$\mathcal{T}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{H}\mathbf{X}_2^*) & -\operatorname{Im}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{H}\mathbf{X}_2^*) \\ \sqrt{2}\operatorname{Re}(\mathbf{g}^T) & -\sqrt{2}\operatorname{Im}(\mathbf{g}^T) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{H}\mathbf{X}_2^*) & \operatorname{Re}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{H}\mathbf{X}_2^*) \end{bmatrix} \in R^{m \times 2N} \quad (3.1.93)$$

式中  $\operatorname{Re}(\mathbf{A})$  和  $\operatorname{Im}(\mathbf{A})$  分别表示复矩阵  $\mathbf{A}$  的实部与虚部。

步骤 3 计算实矩阵  $\mathcal{T}(\mathbf{M})$  的奇异值分解  $\mathcal{T}(\mathbf{M}) = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , 确定其主奇异值个数  $p$  (有效秩)。

步骤 4 计算合成的中心复共轭对称矩阵  $\mathbf{M} = (\mathbf{Q}_m\mathbf{U})\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{V}^H\mathbf{Q}_{2N}^H)$ , 从这一奇异值分解形式得到矩阵  $\mathbf{M}$  的左奇异矩阵  $\mathbf{U}_M = \mathbf{Q}_m\mathbf{U}$ 。矩阵  $\mathbf{U}_M$  的前  $p$  列组成子矩阵  $\mathbf{U}_s$ , 它的列向量张成中心复共轭对称矩阵  $\mathbf{M}$  的信号子空间。

步骤 5 对矩阵  $\mathbf{U}_s$  直接使用基本 ESPRIT 算法 2 的步骤 3 和步骤 4, 即可得到 DOA 估计。

## 3.2 习 题

**题 3.1** 令  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  是满足下列差分方程的平稳随机过程:

$$\begin{aligned} x(t) - \alpha x(t-1) &= w(t), & \{w(t)\} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ y(t) - \alpha y(t-1) &= x(t) + u(t), & \{u(t)\} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

式中  $|\alpha| < 1$ , 且  $\{w(t)\}$  和  $\{u(t)\}$  不相关。求  $\{y(t)\}$  的功率谱。

**题 3.2** 假定输入信号  $\{x(t)\}$  是一个零均值的高斯白噪声, 其功率谱为  $P_x(f) = N_0$ , 且线性系统的冲激响应为

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求输出  $y(t) = x(t) * h(t)$  的功率谱及协方差函数。

**题 3.3** 已知一无线信道的传递函数由下式描述:

$$H(f) = K e^{-j2\pi f \tau_0}, \quad \tau_0 = r/c$$

式中  $r$  为传播距离,  $c$  为光速。这样的信道称为无弥散信道 (nondispersive channel)。现在假定发射信号为

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

式中  $\phi$  是一在  $[-\pi, \pi]$  内均匀分布的随机变量。令  $y(t)$  是发射信号  $x(t)$  经过无弥散信道后, 为接收机所接收的信号。接收机端存在高斯白噪声  $n(t)$ , 其均值为零、功率谱密度为  $N_0$ , 并且加性噪声  $n(t)$  与发射信号  $x(t)$  独立。求接收机接收信号  $y(t)$  的功率谱  $P_y(f)$  以及发射信号与接收信号之间的互功率谱  $P_{xy}(f)$ 。

**题 3.4** 一随机信号的功率谱密度为

$$P(\omega) = \frac{1.25 + \cos \omega}{1.0625 + 0.5 \cos \omega}$$

若将这一功率谱看作是被具有单位功率谱的白噪声所激励的线性因果、最小相位系统  $H(z)$  的输出的功率谱, 求该线性系统  $H(z)$ 。

**题 3.5** 一随机信号  $x(n)$  的功率谱为  $\omega$  的有理式:

$$P(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^2 + 1}$$

若将信号  $x(n)$  视为线性因果、最小相位系统  $H(z)$  被单位功率谱的白噪声激励的输出, 试确定该系统.

**题 3.6** 离散时间的二阶 AR 过程由差分方程

$$x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + w(n)$$

描述, 式中  $w(n)$  是一零均值、方差为  $\sigma_w^2$  的白噪声. 证明  $x(n)$  的功率谱为

$$P_x(f) = \frac{\sigma_w^2}{1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1(1 - a_2)\cos(2\pi f) - 2a_2\cos(4\pi f)}$$

**题 3.7** 二阶滑动平均过程由

$$x(n) = w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2), \quad \{w(n)\} \sim N(0, \sigma^2)$$

定义, 式中  $N(0, \sigma^2)$  表示正态分布, 其均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ . 求  $x(n)$  的功率谱.

**题 3.8** 已知随机过程  $\{y(t)\}$  是一 MA(2) 过程, 其差分模型为

$$y(t) = w(t) + 1.5w(t-1) - w(t-2)$$

式中  $\{w(t)\}$  是一个均值为 0、方差  $\sigma_w^2 = 1$  的高斯白噪声过程, 求  $y(t)$  的另一等价 MA 模型.

**题 3.9** 令  $x(t)$  是一零均值的未知随机过程, 其自相关函数的前三个值为  $R_x(0) = 2$ ,  $R_x(1) = 0$  和  $R_x(2) = -1$ . 在这种情况下, 我们能够用一个 ARMA(1,1) 模型来拟合它吗?

**题 3.10** 令  $0 < a < 1$  和  $0 < b < 1$ , 已知三个 MA 模型

$$y_1(n) = e(n) - (a+b)e(n-1) + abe(n-2)$$

$$y_2(n) = e(n) - (a+b)e(n+1) + abe(n+2)$$

$$y_3(n) = -ae(n+1) + (1+ab)e(n) - be(n-1)$$

判别哪个是最小相位系统、最大相位系统和非最小相位系统?

**题 3.11** 一个差分滤波器的输出为

$$y(n) = x(n) + x(n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

令  $x(n)$  的功率谱密度为  $1/(1+f^2)$ , 求差分滤波器输出  $y(n)$  的功率谱密度。

**题 3.12** 一个简单的滑动平均过程由下式给出:

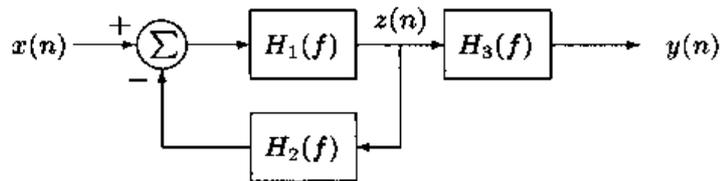
$$y(n) = \frac{1}{3}[x(n-1) + x(n) + x(n+1)], \quad n = 1, 2, \dots$$

若  $x(n)$  的功率谱密度为  $P_x(f)$ , 求  $y(n)$  的功率谱密度。

**题 3.13** (1) 一级联线性系统如图题 3.13 (a) 所示。若输入信号  $x(n)$  的功率谱密度为  $P_x(f)$ , 试用  $P_x(f)$  和子系统传递函数  $H_1(f)$ ,  $H_2(f)$  表示系统输出  $y(n)$  的功率谱密度。



(a)



(b)

图题 3.13 级联线性系统 (a) 与反馈线性系统 (b)

(2) 考虑图题 3.13 (b) 所示的反馈线性系统, 试用  $x(n)$  的功率谱密度和子系统传递函数  $H_1(f)$ ,  $H_2(f)$ ,  $H_3(f)$  表示  $y(n)$  的功率谱密度。

**题 3.14** 一窄带随机过程表示为

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \\ &= x_c(t) \cos(2\pi f_c t) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

式中  $x_c(t) = R(t) \cos \phi(t)$  和  $x_s(t) = R(t) \sin \phi(t)$  分别称为  $x(t)$  的同相分量和正交分量。系数  $R(t)$  为非负函数, 称为窄带信号  $x(t)$  的包络, 即有

$$R(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$$

而

$$\phi(t) = \arctan[x_s(t)/x_c(t)]$$

称为窄带信号的相位。假定窄带信号为平稳信号，定义向量

$$\mathbf{x}(t) = [x_c(t), x_s(t), x_c(t + \tau), x_s(t + \tau)]^T$$

(1) 证明

$$E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\} = \begin{bmatrix} R_x(0) & 0 & R_c(\tau) & R_{cs}(-\tau) \\ 0 & R_x(0) & R_{cs}(\tau) & R_s(\tau) \\ R_c(\tau) & R_{cs}(\tau) & R_x(0) & 0 \\ R_{cs}(-\tau) & R_s(\tau) & 0 & R_x(0) \end{bmatrix}$$

式中

$$R_x(0) = R_c(0) = R_s(0)$$

$$R_c(\tau) = E\{x_c(t)x_c(t - \tau)\}$$

$$R_s(\tau) = E\{x_s(t)x_s(t - \tau)\}$$

$$R_{cs}(\tau) = E\{x_c(t)x_s(t - \tau)\}$$

(2) 当  $x(t)$  是一窄带平稳高斯过程时，并且相位  $\phi(t)$  是在  $[0, 2\pi]$  内均匀分布的随机数，即

$$f(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明包络  $R(t)$  的概率密度函数服从下面的 Rayleigh 分布：

$$f(R(t)) = \begin{cases} \frac{R(t)}{R_x(0)} \exp\left[-\frac{R^2(t)}{2R_x(0)}\right], & R(t) > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

**题 3.15** 一线性离散系统  $\{h(n)\}$  的时间常数  $T_0$  定义为满足

$$\sum_{n=0}^{T_0} h^2(n) \approx 0.95 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)$$

最小整数。利用这一定义求系统

$$x(n) + 0.8x(n - 1) = e(n)$$

的时间常数。

**题 3.16** 信号建模的大多数方法将已知的数据序列  $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$  表示成有理式线性系统

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}}$$

的冲激响应。若已知数据序列  $\{x(n)\} = \{1, -2, 3, -4, 5\}$  用  $p = 2$  和  $q = 2$  的有理式线性系统的冲激响应来建模, 试求  $a_1, a_2$  和  $b_0, b_1, b_2$ 。

**题 3.17** 一零均值 MA(2) 过程满足下面的法方程:

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 3$$

$$b_0 b_1 + b_1 b_2 = 2$$

$$b_0 b_2 = 1$$

试求 MA 参数  $b_0, b_1$  和  $b_2$ 。

**题 3.18** 因果 ARMA( $p, q$ ) 过程的修正 Yule-Walker 方程为

$$1 + a_1 R(k-1) + \dots + a_p R(k-p) = c(k)$$

式中

$$c(k) = \sum_{i=0}^q b(i)h(i-k)$$

而  $h(k)$  是 ARMA 过程的冲激响应系数。令

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}}$$

是产生该 ARMA 过程的线性系统的传递函数。试证明, MA 参数可以通过求解

$$C(z)A(z^{-1}) = B(z)B(z^{-1})$$

得到, 式中

$$C(z) = c(0) + c(1)z^{-1} + \dots + c(q)z^{-q} + \dots$$

若已知一因果 ARMA(2,2) 过程是由一白噪声激励线性系统

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

产生的, 并且已知其自相关函数  $R(0) = 3$ ,  $R(1) = 2$  和  $R(2) = 1$ , 求传递函数  $H(z)$  的具体表达式.

**题 3.19** ARMA 建模的 Prony 方法建立在以下两个基本考虑的基础之上: 数据序列  $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$  建模成 ARMA( $p, q$ ) 过程的冲激响应, 而此冲激响应又用 Prony 复指数模型拟合. 若已知数据序列  $\{x(n)\} = \{1, -2, 3, -4, 5\}$  用  $p = 2$  和  $q = 2$  的有理式线性系统的冲激响应来建模, 试求  $x(n)$  的信号模型.

**题 3.20** 误差功率定义为

$$P_m(r_m) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \{ |e_{m-1}^f(n) + r_m e_{m-1}^b(n-1)|^2 + |r_m^* e_{m-1}^f(n-1) + e_{m-1}^b(n-1)|^2 \}$$

(1) 求  $\min_{r_m} [P_m(r_m)]$ ;

(2) 证明

$$r_m = \frac{-2 \sum_{n=m+1}^N e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1)}{\sum_{n=m+1}^N [|e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2]}, \quad m = 1, 2, \dots$$

(3) 证明  $|r_m| \leq 1$  对  $m = 1, 2, \dots$  恒成立.

**题 3.21** 利用格型结构实现三阶滤波器

$$H(z) = 1 + 0.5z^{-1} - 0.1z^{-2} - 0.5z^{-3}$$

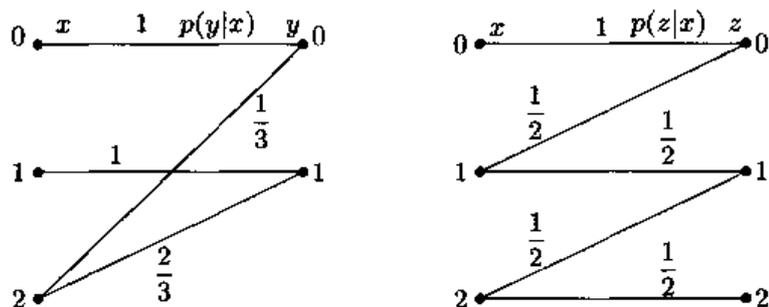
并画出格型滤波器的实现图<sup>[32]</sup>.

**题 3.22** 一信号源从三个字符表中产生字符 0, 1, 2, 并且产生这些字符的概率分别为

$$p(0) = \frac{1}{5}, \quad p(1) = \frac{2}{3}, \quad p(2) = \frac{2}{15}$$

假定每个字符  $x$  通过两个不同的信道同时发射, 其输出如图题 3.22 所示.

令  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$  和  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$  分别为随机变量组. 求信息量  $I(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ ,  $I(\mathbf{x}; \mathbf{z})$  和熵  $H(\mathbf{x})$ ,  $H(\mathbf{y})$ ,  $H(\mathbf{z})$ .



图题 3.22 字符通过两个信道同时发射

**题 3.23** 考虑  $M$  个实谐波信号的 Pisarenko 谐波分解的下列推广<sup>[20]</sup>。令噪声子空间的维数大于 1, 于是张成噪声子空间的矩阵  $V_n$  的每一个列向量的元素都满足

$$\sum_{k=0}^{2M} v_k e^{j\omega_i k} = \sum_{k=0}^{2M} v_k e^{-j\omega_i k} = 0, \quad 1 \leq i \leq M \quad (\text{题 3.23.1})$$

令  $\bar{p} = V_n \alpha$  表示  $V_n$  的列向量的非退化线性组合。所谓非退化, 乃是指由向量  $\bar{p} = [\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{2M}]^T$  的元素构造的多项式  $\bar{p}(z)$  至少具有  $2M$  阶, 即

$$\bar{p}(z) = \bar{p}_0 + \bar{p}_1 z + \dots + \bar{p}_{2M} z^{2M}, \quad \bar{p}_{2M} \neq 0$$

于是, 这一多项式也满足式 (题 3.23.1)。这意味着, 所有谐波频率均可由多项式  $\bar{p}(z)$  位于单位圆上的  $2M$  个根求出。现在希望选择系数向量  $\alpha$  满足条件:  $\bar{p}_0 = 1$  和

$$\sum_{k=1}^{2M} \bar{p}_k^2 = \min.$$

(1) 令  $v^T$  是矩阵  $V_n$  的第一行, 而  $V$  是由  $V_n$  的其他所有行组成的矩阵。若  $p$  是由  $\bar{p}$  除第一个元素以外的其他元素组成的向量, 试证明

$$\alpha = \arg \min \alpha^T V^T V \alpha$$

约束条件为

$$v^T \alpha = 1$$

(2) 利用 Lagrange 乘子法证明约束优化问题的解为

$$\alpha = \frac{(V^T V)^{-1} v}{v^T (V^T V)^{-1} v}$$

$$p = \frac{V (V^T V)^{-1} v}{v^T (V^T V)^{-1} v}$$

**题 3.24** 一观测数据为

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N-2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

现在使用 Prony 方法对  $x(n)$  建模, 使得  $x(n)$  是只有一个极点和一个零点的线性时不变滤波器  $H(z)$  的单位冲激响应。求滤波器传递函数  $H(z)$  的表达式, 并写出  $N = 21$  时的  $H(z)$ 。

**题 3.25** 已知一观测数据向量  $\mathbf{x} = [1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^N]^T$ , 其中  $|\alpha| < 1$ 。假定采用 Prony 方法拟合此数据, 并且滤波器传递函数

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$$

求系数  $a_1$  和  $b_0$ , 并写出  $H(z)$  的具体形式。

**题 3.26** 抽头延迟线的输出由

$$y(k) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(k)$$

给出, 式中

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$$

$$\mathbf{x}(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-n)]^T$$

令

$$\mathbf{R}_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = \mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Q}^T$$

式中

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

如果输出序列  $\{y(k)\}$  的均方值为

$$J_a = \frac{1}{2} \mathbf{E}\{y^2(k)\}$$

证明:

(1) 在条件  $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1$  的约束下, 使  $J_a$  最小化等价于

$$J_w = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n w_i^2 \lambda_i$$

的最小化, 其中

$$\sum_{i=0}^n w_i^2 = 1 \quad \text{和} \quad \mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_n]^T$$

且  $\mathbf{w} = \mathbf{Q}^T \mathbf{a}$ .

(2) 若取  $\mathbf{w} = [1, 0, \dots, 0]^T$ , 则使  $J_a$  最小化的最优向量  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ , 其中  $\mathbf{a}_0$  是矩阵  $\mathbf{R}_z$  相对于最小特征值  $\lambda_0$  的特征向量.

**题 3.27** <sup>[41]</sup> 考虑无线通信中的一个码分多址 (CDMA) 系统, 它共有  $K$  个用户. 其中, 用户 1 为期望用户. 一接收机接收所有  $K$  个用户发射的信号, 其接收信号的向量形式由下式给出:

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k(n) = h_1 w_1(n) + \mathbf{H} \mathbf{w}(n) + \mathbf{v}(n)$$

式中  $w_1(n)$  是期望用户发射的比特信号, 它是我们希望检测的, 且  $h_1$  是期望用户的等价特征波形向量, 它是已知的; 而  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{w}(n)$  分别为所有其他用户 (简称干扰用户) 的特征波形向量组成的矩阵和干扰比特向量. 假定信道的加性噪声为高斯白噪声, 各个噪声分量的均值都等于零, 方差均为  $\sigma^2$ .

(1) 设计一最小方差接收机  $f$ , 使得接收机输出

$$\hat{w}_1(n) = f^T \mathbf{y}(n)$$

能够在满足约束条件

$$f^H h_1 = 1$$

的同时, 与  $w_1(n)$  之间的均方误差为最小. 求最小方差接收机  $f$  的表达式.

(2) 若期望用户的等价特征波形向量  $h_1$  为

$$h_1 = C_1 g_1$$

式中

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_1(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_1(0) \\ c_1(P-1) & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & c_1(P-1) \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} g_1(0) \\ 0 \\ g_1(L) \end{bmatrix}$$

这里  $c_1(0), c_1(1), \dots, c_1(P-1)$  是期望用户的扩频码, 而  $g_1(l)$  代表第  $l$  条传输路径的参数. 试设计一最小方差无畸变 (MVDR) 波束形成器  $\mathbf{g}$ , 并证明它恰好是矩阵束  $(\mathbf{C}_1^H \mathbf{R}_y \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1^H \mathbf{C}_1)$  与最小广义特征值对应的广义特征向量.

**题 3.28** 已知一含噪声的观测数据序列的自相关矩阵的特征值分解如下:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$$

试用 MUSIC 方法和求根 MUSIC 方法确定空间参数  $\omega$ .

**题 3.29** 令空间随机信号向量  $\mathbf{x}(n)$  的自相关矩阵  $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}$  的特征值分解

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$$

其中  $\mathbf{U} = [\mathbf{S}, \mathbf{G}]$ , 并且  $\mathbf{S}$  的列张成  $\mathbf{x}(n)$  的噪声子空间. 现在, 在噪声子空间适当选择一向量  $\mathbf{d}$ , 并定义其伪谱或广义谱为

$$P_{MN} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathbf{a}^H(\omega)\mathbf{d}|^2} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega)\mathbf{d}\mathbf{d}^H\mathbf{a}(\omega)}$$

若选择  $\mathbf{d}$  具有最小范数, 并且其第一个元素等于 1, 则空间信号的空间参数由广义谱  $P_{MN}(\omega)$  的峰值所对应的  $\omega$  决定. 这一方法称为最小范数法, 是 Kumaresan 与 Tufts 提出的 [21]. 试求向量  $\mathbf{d}$  的表达式.

## 3.3 习题解答

题 3.1 计算  $\{x(t)\}$  的功率谱, 得

$$P_x(\omega) = \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha z^{-1}|^2} \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

取  $y(t)$  的延迟形式

$$y(t - \tau) - \alpha y(t - 1 - \tau) = x(t - \tau) + u(t - \tau)$$

于是有

$$\begin{aligned} & E\{[y(t) - \alpha y(t - 1)][y(t - \tau) - \alpha y(t - 1 - \tau)]\} \\ &= E\{[x(t) + u(t)][x(t - \tau) + u(t - \tau)]\} \end{aligned}$$

注意到  $\{w(t)\}$  和  $\{u(t)\}$  不相关, 所以  $\{x(t)\}$  与  $\{u(t)\}$  也不相关。展开上式后, 得

$$\begin{aligned} & E\{y(t)y(t - \tau)\} - \alpha E\{y(t - 1)y(t - \tau)\} - \\ & \alpha E\{y(t)y(t - 1 - \tau)\} + \alpha^2 E\{y(t - 1)y(t - 1 - \tau)\} \\ &= E\{x(t)x(t - \tau)\} + E\{u(t)u(t - \tau)\} \end{aligned}$$

即

$$(1 + \alpha^2)R_y(\tau) - \alpha[R_y(\tau - 1) + R_y(\tau + 1)] = R_x(\tau) + \sigma^2\delta(\tau)$$

上式两边同乘  $e^{-j\omega\tau}d\tau$  后, 再积分, 则有

$$(1 + \alpha^2)P_y(\omega) - \alpha(e^{-j\omega} + e^{j\omega})P_y(\omega) = P_x(\omega) + \sigma^2$$

从而得

$$\begin{aligned} P_y(\omega) &= \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega} (P_x(\omega) + \sigma^2) \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega} \left( \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha e^{-j\omega}|^2} + \sigma^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{题 3.1.1})$$

答案:  $y(t)$  的功率谱由式 (题 3.1.1) 给出。

**题 3.2** 由题知, 系统的传递函数

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t(1+j2\pi f)} dt = \frac{1}{1+j2\pi f} \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= H(f)H(-f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \frac{1}{1-j2\pi f} \\ &= \frac{1}{1+4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

由输出的功率谱与输入功率谱、系统传递函数之间的关系, 得

$$P_y(f) = |H(f)|^2 P_x(f) = \frac{N_0}{1+4\pi^2 f^2}$$

输出的协方差函数为功率谱的 Fourier 反变换, 故有

$$\begin{aligned} C_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f)e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{1+4\pi^2 f^2} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{N_0}{2} e^{-|\tau|} \end{aligned}$$

由此得  $C_y(0) = N_0/2$ .

**答案:** 输出信号的功率谱为

$$P_y(f) = \frac{N_0}{1+4\pi^2 f^2}$$

协方差函数为

$$C_y(\tau) = \frac{N_0}{2} e^{-|\tau|}$$

**题 3.3** 在接收端存在高斯白噪声的情况下, 接收信号可以写作

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) + n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau + n(t) \end{aligned} \quad \text{(题 3.3.1a)}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} x_1(t) + n(t) \quad \text{(题 3.3.1b)}$$

式中  $x_1(t) = x(t) * h(t)$ 。由式 (题 3.3.1a), 可求出接收信号的均值为

$$\begin{aligned} E\{y(t)\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau\right\} + E\{n(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)E\{x(\tau)\}d\tau + 0 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

这里利用了结果  $E\{x(t)\} = E\{A \cos(2\pi f_c t + \phi)\} = 0$ , 其中  $\phi$  是在  $[-\pi, \pi]$  内均匀分布的随机变量。由于  $x(t)$  是一个零均值的平稳随机信号, 容易求得  $x_1(t)$  的功率谱为

$$\begin{aligned} P_{x_1}(f) &= |H(f)|^2 P_x(f) \\ &= |Ke^{-j2\pi f\tau_0}|^2 P_x(f) \\ &= K^2 P_x(f) \end{aligned} \quad (\text{题 3.3.2})$$

注意到发射信号是一个谐波信号, 故有

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) = C_x(\tau) \quad (\text{题 3.3.3a})$$

$$\begin{aligned} P_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \end{aligned} \quad (\text{题 3.3.3b})$$

将式 (题 3.3.3b) 代入式 (题 3.3.2), 得

$$P_{x_1}(f) = \frac{K^2 A^2}{4} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \quad (\text{题 3.3.4})$$

由于发射信号  $x(t)$  与加性噪声  $n(t)$  独立, 从而  $x_1(t)$  与  $n(t)$  独立, 故由式 (题 3.3.1b) 得到

$$C_y(\tau) = C_{x_1}(\tau) + C_n(\tau)$$

两边作 Fourier 变换, 并代入式 (题 3.3.4), 即得

$$\begin{aligned} P_y(f) &= P_{x_1}(f) + P_n(f) \\ &= \frac{K^2 A^2}{4} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + N_0 \end{aligned} \quad (\text{题 3.3.5})$$

为了求互功率谱  $P_{xy}(f)$ , 我们先由题给条件求出无弥散信道的冲激响应:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-j2\pi f\tau_0}e^{j2\pi ft}df \\ &= K\delta(t - \tau_0) \end{aligned} \quad (\text{题 3.3.6})$$

于是, 由式 (题 3.3.1a) 可以求出发射信号与接收信号的互相关函数

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E\{x(t+\tau)y(t)\} \\ &= E\left\{x(t+\tau)\int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)du\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)E\{x(t+\tau)x(u)\}du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)R_x(t+\tau-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t')R_x(t'+\tau)dt' \end{aligned} \quad (\text{题 3.3.7})$$

由于发射信号  $x(t)$  和加性噪声  $n(t)$  都是零均值的, 故由式 (题 3.3.1a) 知, 接收信号  $y(t)$  也是零均值的. 于是,  $x(t)$  和  $y(t)$  的互协方差函数与互相关函数等价, 即  $C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$ .

将式 (题 3.3.7) 代入互功率谱定义中, 立即有

$$\begin{aligned} P_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t')R_x(t'+\tau)e^{-j2\pi f\tau}dt'd\tau \end{aligned}$$

作变量代换  $\tau' = t' + \tau$  后, 上式变作

$$\begin{aligned} P_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t')e^{j2\pi ft'}dt' \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau')e^{-j2\pi f\tau'}d\tau' \\ &= H^*(f)P_x(f) \end{aligned} \quad (\text{题 3.3.8})$$

式中  $H^*(f)$  是  $H(f)$  的复数共轭.

将题给  $H(f)$  和式 (题 3.3.3b) 一并代入式 (题 3.3.8), 即可得到

$$P_{xy}(f) = \frac{KA^2}{4}e^{j2\pi f\tau_0}[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)] \quad (\text{题 3.3.9})$$

**答案:** 接收机接收信号  $y(t)$  的功率谱由式 (题 3.3.5) 给出, 而发射信号  $x(t)$  与接收信号  $y(t)$  之间的互功率谱由式 (题 3.3.9) 决定.

**题 3.4** 首先, 已知的功率谱可以改写作

$$P(\omega) = \frac{(e^{j\omega} + 0.5)(e^{-j\omega} + 0.5)}{(e^{j\omega} + 0.25)(e^{-j\omega} + 0.25)}$$

令  $z = e^{j\omega}$ , 则

$$P(\omega) = \frac{(z + 0.5)(z^{-1} + 0.5)}{(z + 0.25)(z^{-1} + 0.25)} \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

式右的  $z$  多项式可以分解为以下四种形式:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{z + 0.5}{z + 0.25} \\ H_2(z) &= \frac{z + 0.5}{z^{-1} + 0.25} \\ H_3(z) &= \frac{z^{-1} + 0.5}{z + 0.25} \\ H_4(z) &= \frac{z^{-1} + 0.5}{z^{-1} + 0.25} \end{aligned}$$

在这四种线性系统中, 只有线性系统  $H_1(z)$  的零、极点全部在单位圆内, 是一个因果、最小相位系统.

**答案:** 线性因果、最小相位系统  $H(z)$  为

$$H(z) = \frac{z + 0.5}{z + 0.25}$$

**题 3.5** 首先, 将有理式功率谱改写为

$$P(\omega) = \frac{(j\omega + 2)(-j\omega + 2)}{(j\omega + 1)(-j\omega + 1)}$$

上式右边的  $\omega$  多项式有四种可能的分解:

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1} \\ H_2(\omega) &= \frac{j\omega + 2}{-j\omega + 1} \\ H_3(\omega) &= \frac{-j\omega + 2}{j\omega + 1} \\ H_4(\omega) &= \frac{-j\omega + 2}{-j\omega + 1} \end{aligned}$$

或用 Laplace 算子  $s$  写作

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{s+2}{s+1} \\ H_2(s) &= \frac{s+2}{-s+1} \\ H_3(s) &= \frac{-s+2}{s+1} \\ H_4(s) &= \frac{-s+2}{-s+1} \end{aligned}$$

在这四种传递函数中,  $H_1(s)$  具有零点  $s = -2$  和极点  $s = -1$ . 换成  $z$  变量的形式,  $H(z)$  的零点  $z = e^{j\omega} = e^s = e^{-2}$  和极点  $z = e^{j\omega} = e^s = e^{-1}$  全部在单位圆内, 是一个因果、最小相位系统. 其他三种系统都不可能同时是因果的和最小相位的.

**答案:** 待求的因果、最小相位系统由

$$H(\omega) = \frac{(j\omega + 2)}{(j\omega + 1)}$$

给出.

**题 3.6** 由 AR 过程的功率谱公式知

$$P_x(f) = \frac{\sigma_w^2}{|1 - a_1 e^{-j2\pi f} - a_2 e^{-j4\pi f}|^2} \quad (\text{题 3.6.1})$$

式中

$$\begin{aligned} & |1 - a_1 e^{-j2\pi f} - a_2 e^{-j4\pi f}|^2 \\ &= (1 - a_1 e^{-j2\pi f} - a_2 e^{-j4\pi f})(1 - a_1 e^{j2\pi f} - a_2 e^{j4\pi f}) \\ &= 1 + a_1^2 + a_2^2 - a_2(e^{-j4\pi f} + e^{j4\pi f}) + a_1 a_2 e^{j2\pi f} + a_1 a_2 e^{-j2\pi f} - \\ & \quad a_1(e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f}) \\ &= 1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1(1 - a_2) \cos(2\pi f) - 2a_2 \cos(4\pi f) \end{aligned} \quad (\text{题 3.6.2})$$

将式 (题 3.6.2) 代入式 (题 3.6.1), 立即得

$$P_x(f) = \frac{\sigma_w^2}{1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1(1 - a_2) \cos(2\pi f) - 2a_2 \cos(4\pi f)}$$

这就完成了本习题的证明.

**题 3.7** 由滑动平均过程的功率谱定义, 得

$$P_x(f) = \sigma^2 |1 + b_1 e^{-j2\pi f} + b_2 e^{-j4\pi f}|^2 \quad (\text{题 3.7.1})$$

统的冲激响应为

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & k = -1, 0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由此可写出 FIR 系统的传递函数

$$H(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}$$

于是, 输出  $y(n)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned} P_y(f) &= |H(f)|^2 P_x(f) \\ &= |H(z)|^2 \Big|_{z=e^{j2\pi f}} P_x(f) \\ &= \frac{1}{9} |e^{j2\pi f} + 1 + e^{-j2\pi f}|^2 P_x(f) \\ &= \frac{1}{9} |1 + 2\cos(2\pi f)|^2 P_x(f) \end{aligned}$$

**答案:**  $y(n)$  的功率谱密度为

$$P_y(f) = \frac{1}{9} |1 + 2\cos(2\pi f)|^2 P_x(f)$$

**题 3.13** (1) 对于图题 3.13 (a) 所示的级联线性系统, 两个子系统级联后的合成系统的传递函数为  $H(f) = H_1(f)H_2(f)$ . 因此, 输出  $y(n)$  的功率谱密度为

$$P_y(f) = |H(f)|^2 P_x(f) = |H_1(f)|^2 |H_2(f)|^2 P_x(f)$$

(2) 根据图题 3.13 (b), 可以写出  $z(n)$  的反馈输出为  $z(n)$  与  $H_2(z)$  的冲激响应  $h_2(n)$  的卷积, 即等于  $z(n) * h_2(n)$ . 由于  $z(n)$  是利用  $x(n) - z(n) * h_2(n)$  激励系统  $H_1(z)$  的输出, 故可以写出系统  $H_1(z)$  的输入输出关系

$$[x(n) - z(n) * h_2(n)] * h_1(n) = z(n)$$

作 Fourier 变换后, 得

$$X(f)H_1(f) - Z(f)H_2(f)H_1(f) = Z(f)$$

从而有

$$Z(f) = \frac{H_1(f)X(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

两边取模后平方, 则

$$|Z(f)|^2 = \frac{|H_1(f)|^2 |X(f)|^2}{|1 + H_1(f)H_2(f)|^2}$$

统的冲激响应为

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & k = -1, 0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由此可写出 FIR 系统的传递函数

$$H(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}$$

于是, 输出  $y(n)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned} P_y(f) &= |H(f)|^2 P_x(f) \\ &= |H(z)|^2 \Big|_{z=e^{j2\pi f}} P_x(f) \\ &= \frac{1}{9} |e^{j2\pi f} + 1 + e^{-j2\pi f}|^2 P_x(f) \\ &= \frac{1}{9} |1 + 2\cos(2\pi f)|^2 P_x(f) \end{aligned}$$

**答案:**  $y(n)$  的功率谱密度为

$$P_y(f) = \frac{1}{9} |1 + 2\cos(2\pi f)|^2 P_x(f)$$

**题 3.13** (1) 对于图题 3.13 (a) 所示的级联线性系统, 两个子系统级联后的合成系统的传递函数为  $H(f) = H_1(f)H_2(f)$ . 因此, 输出  $y(n)$  的功率谱密度为

$$P_y(f) = |H(f)|^2 P_x(f) = |H_1(f)|^2 |H_2(f)|^2 P_x(f)$$

(2) 根据图题 3.13 (b), 可以写出  $z(n)$  的反馈输出为  $z(n)$  与  $H_2(z)$  的冲激响应  $h_2(n)$  的卷积, 即等于  $z(n) * h_2(n)$ . 由于  $z(n)$  是利用  $x(n) - z(n) * h_2(n)$  激励系统  $H_1(z)$  的输出, 故可以写出系统  $H_1(z)$  的输入输出关系

$$[x(n) - z(n) * h_2(n)] * h_1(n) = z(n)$$

作 Fourier 变换后, 得

$$X(f)H_1(f) - Z(f)H_2(f)H_1(f) = Z(f)$$

从而有

$$Z(f) = \frac{H_1(f)X(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

两边取模后平方, 则

$$|Z(f)|^2 = \frac{|H_1(f)|^2 |X(f)|^2}{|1 + H_1(f)H_2(f)|^2}$$

统的冲激响应为

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & k = -1, 0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由此可写出 FIR 系统的传递函数

$$H(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}$$

于是, 输出  $y(n)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned} P_y(f) &= |H(f)|^2 P_x(f) \\ &= |H(z)|^2 \Big|_{z=e^{j2\pi f}} P_x(f) \\ &= \frac{1}{9} |e^{j2\pi f} + 1 + e^{-j2\pi f}|^2 P_x(f) \\ &= \frac{1}{9} |1 + 2\cos(2\pi f)|^2 P_x(f) \end{aligned}$$

**答案:**  $y(n)$  的功率谱密度为

$$P_y(f) = \frac{1}{9} |1 + 2\cos(2\pi f)|^2 P_x(f)$$

**题 3.13** (1) 对于图题 3.13 (a) 所示的级联线性系统, 两个子系统级联后的合成系统的传递函数为  $H(f) = H_1(f)H_2(f)$ . 因此, 输出  $y(n)$  的功率谱密度为

$$P_y(f) = |H(f)|^2 P_x(f) = |H_1(f)|^2 |H_2(f)|^2 P_x(f)$$

(2) 根据图题 3.13 (b), 可以写出  $z(n)$  的反馈输出为  $z(n)$  与  $H_2(z)$  的冲激响应  $h_2(n)$  的卷积, 即等于  $z(n) * h_2(n)$ . 由于  $z(n)$  是利用  $x(n) - z(n) * h_2(n)$  激励系统  $H_1(z)$  的输出, 故可以写出系统  $H_1(z)$  的输入输出关系

$$[x(n) - z(n) * h_2(n)] * h_1(n) = z(n)$$

作 Fourier 变换后, 得

$$X(f)H_1(f) - Z(f)H_2(f)H_1(f) = Z(f)$$

从而有

$$Z(f) = \frac{H_1(f)X(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

两边取模后平方, 则

$$|Z(f)|^2 = \frac{|H_1(f)|^2 |X(f)|^2}{|1 + H_1(f)H_2(f)|^2}$$

统的冲激响应为

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & k = -1, 0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由此可写出 FIR 系统的传递函数

$$H(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}$$

于是, 输出  $y(n)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned} P_y(f) &= |H(f)|^2 P_x(f) \\ &= |H(z)|^2 \Big|_{z=e^{j2\pi f}} P_x(f) \\ &= \frac{1}{9} |e^{j2\pi f} + 1 + e^{-j2\pi f}|^2 P_x(f) \\ &= \frac{1}{9} |1 + 2\cos(2\pi f)|^2 P_x(f) \end{aligned}$$

**答案:**  $y(n)$  的功率谱密度为

$$P_y(f) = \frac{1}{9} |1 + 2\cos(2\pi f)|^2 P_x(f)$$

**题 3.13** (1) 对于图题 3.13 (a) 所示的级联线性系统, 两个子系统级联后的合成系统的传递函数为  $H(f) = H_1(f)H_2(f)$ . 因此, 输出  $y(n)$  的功率谱密度为

$$P_y(f) = |H(f)|^2 P_x(f) = |H_1(f)|^2 |H_2(f)|^2 P_x(f)$$

(2) 根据图题 3.13 (b), 可以写出  $z(n)$  的反馈输出为  $z(n)$  与  $H_2(z)$  的冲激响应  $h_2(n)$  的卷积, 即等于  $z(n) * h_2(n)$ . 由于  $z(n)$  是利用  $x(n) - z(n) * h_2(n)$  激励系统  $H_1(z)$  的输出, 故可以写出系统  $H_1(z)$  的输入输出关系

$$[x(n) - z(n) * h_2(n)] * h_1(n) = z(n)$$

作 Fourier 变换后, 得

$$X(f)H_1(f) - Z(f)H_2(f)H_1(f) = Z(f)$$

从而有

$$Z(f) = \frac{H_1(f)X(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

两边取模后平方, 则

$$|Z(f)|^2 = \frac{|H_1(f)|^2 |X(f)|^2}{|1 + H_1(f)H_2(f)|^2}$$

利用功率谱密度关系  $P_z(f) = |Z(f)|^2$  和  $P_x(f) = |X(f)|^2$ , 即可将上式改写作

$$P_z(f) = \frac{|H_1(f)|^2}{|1 + H_1(f)H_2(f)|^2} P_x(f) \quad (\text{题 3.13.1})$$

利用式 (题 3.13.1) 易知

$$\begin{aligned} P_y(f) &= |H_3(f)|^2 P_z(f) \\ &= \frac{|H_1(f)H_3(f)|^2}{|1 + H_1(f)H_2(f)|^2} P_x(f) \end{aligned} \quad (\text{题 3.13.2})$$

答案:

(1) 图题 3.13 (a) 所示级联线性系统输出的功率谱密度为

$$P_y(f) = |H_1(f)H_2(f)|^2 P_x(f)$$

(2) 图题 3.13 (b) 所示反馈线性系统输出的功率谱密度为

$$P_y(f) = \frac{|H_1(f)H_3(f)|^2}{|1 + H_1(f)H_2(f)|^2} P_x(f)$$

题 3.14 (1) 直接计算得

$$\begin{aligned} E\{x(t)x^T(t)\} &= \begin{bmatrix} E\{x_c(t)x_c(t)\} & E\{x_c(t)x_s(t)\} \\ E\{x_s(t)x_c(t)\} & E\{x_s(t)x_s(t)\} \\ E\{x_c(t+\tau)x_c(t)\} & E\{x_c(t+\tau)x_s(t)\} \\ E\{x_s(t+\tau)x_c(t)\} & E\{x_s(t+\tau)x_s(t)\} \\ E\{x_c(t)x_c(t+\tau)\} & E\{x_c(t)x_s(t+\tau)\} \\ E\{x_s(t)x_c(t+\tau)\} & E\{x_s(t)x_s(t+\tau)\} \\ E\{x_c(t+\tau)x_c(t+\tau)\} & E\{x_c(t+\tau)x_s(t+\tau)\} \\ E\{x_s(t+\tau)x_c(t+\tau)\} & E\{x_s(t+\tau)x_s(t+\tau)\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_c(0) & R_{cs}(0) & R_c(-\tau) & R_{cs}(-\tau) \\ R_{sc}(0) & R_s(0) & R_{cc}(-\tau) & R_s(-\tau) \\ R_c(\tau) & R_{cs}(\tau) & R_s(0) & R_{cs}(0) \\ R_{sc}(\tau) & R_c(\tau) & R_{sc}(0) & R_s(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{题 3.14.1})$$

由于  $x_c(t)$  与  $x_s(t)$  正交, 故  $R_{cs}(0) = E\{x_c(t)x_s(t)\} = 0$  和  $R_{sc}(0) = E\{x_s(t)x_c(t)\} = 0$ .

然后, 将题给条件

$$\begin{aligned} R_c(0) &= R_s(0) = R_x(0) \\ R_c(\tau) &= E\{x_c(t)x_c(t-\tau)\} \\ R_s(\tau) &= E\{x_s(t)x_s(t-\tau)\} \\ R_{cs}(\tau) &= E\{x_c(t)x_s(t-\tau)\} \\ R_{sc}(\tau) &= E\{x_s(t)x_c(t-\tau)\} \end{aligned}$$

代入式 (题 3.14.1), 并注意到  $R_{sc}(\tau) = R_{cs}(-\tau)$  和  $R_c(-\tau) = R_c(\tau)$ ,  $R_s(-\tau) = R_s(\tau)$ , 立即有

$$E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\} = \begin{bmatrix} R_x(0) & 0 & R_c(\tau) & R_{cs}(-\tau) \\ 0 & R_x(0) & R_{cs}(\tau) & R_s(\tau) \\ R_c(\tau) & R_{cs}(\tau) & R_x(0) & 0 \\ R_{cs}(-\tau) & R_s(\tau) & 0 & R_x(0) \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.14.2})$$

这就证明了本题的第 1 部分.

(2) 由于  $x(t)$  是一平稳高斯过程, 所以同相分量  $x_c(t)$  和正交分量  $x_s(t)$  均为平稳高斯过程. 利用相位  $\phi(t)$  在  $[0, 2\pi]$  内均匀分布的假设, 容易验证,  $E\{x_c(t)\} = E\{R(t)\cos\phi(t)\} = 0$  和  $E\{x_s(t)\} = E\{R(t)\sin\phi(t)\} = 0$ ; 并且方差  $E\{x_c^2(t)\} = R_c(0) = R_x(0)$  和  $E\{x_s^2(t)\} = R_s(0) = R_x(0)$ . 也就是说, 同相分量  $x_c(t)$  和正交分量  $x_s(t)$  分别是零均值、方差为  $R_x(0)$  的高斯随机过程, 即它们的概率密度函数分别为

$$\begin{aligned} f(x_c(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R_x(0)}} \exp\left[-\frac{x_c^2(t)}{2R_x(0)}\right] \\ f(x_s(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R_x(0)}} \exp\left[-\frac{x_s^2(t)}{2R_x(0)}\right] \end{aligned}$$

由概率论知, 当  $x_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  和  $x_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  是两个独立的高斯随机变量时,

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

服从 Rayleigh 分布

$$f(R) = \begin{cases} \frac{R}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right], & R > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以包络  $R(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$  服从 Rayleigh 分布

$$f(R(t)) = \begin{cases} \frac{R(t)}{R_x(0)} \exp\left[-\frac{R^2(t)}{2R_x(0)}\right], & R \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这就完成了本习题第 2 部分的证明。

**题 3.15** 由长除法知, 题给线性系统的传递函数可写作

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.8z^{-1}} = 1 - 0.8z^{-1} + 0.8^2z^{-2} + (-0.8)^3z^{-3} + \dots$$

即冲激响应系数具有一般表达式:

$$h(n) = (-0.8)^n$$

于是, 利用递减等比级数求和公式

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

可求得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{T_0} h^2(n) &= 1 + 0.8^2 + 0.8^4 + \dots + 0.8^{2T_0} \\ &= \frac{1 - 0.8^{2T_0}}{1 - 0.8^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) &= 1 + 0.8^2 + 0.8^4 + 0.8^6 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - 0.8^2} \end{aligned}$$

由题意知, 线性离散时间系统  $\{h(n)\}$  的时间常数  $T_0$  由下式决定:

$$\sum_{n=0}^{T_0} h^2(n) \approx 0.95 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)$$

即

$$\frac{1 - 0.8^{2T_0}}{1 - 0.8^2} \approx 0.95 \times \frac{1}{1 - 0.8^2}$$

换言之, 时间常数  $T_0$  是满足  $0.8^{2T_0} \approx 0.05$  的最小整数, 解之得  $T_0 = 7$ .

**答案:** 线性离散时间系统  $\{h(n)\}$  的时间常数  $T_0 = 7$ .

**题 3.16** <sup>[40]</sup> 系统的冲激响应记作  $\tilde{x}(n)$ , 则由题意知, 冲激响应满足差分方程:

$$\begin{aligned} & \tilde{x}(n) + a_1\tilde{x}(n-1) + \cdots + a_p\tilde{x}(n-p) \\ & = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + \cdots + b_q\delta(n-q) \end{aligned} \quad (\text{题 3.16.1})$$

当使用冲激响应  $\tilde{x}(n)$  对已知数据序列  $x(n), n = 1, 2, \dots, N$  建模时, 则有

$$\tilde{x}(n) = x(n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (\text{题 3.16.2})$$

式 (题 3.16.1) 和式 (题 3.16.2) 可综合写作矩阵方程组:

$$\begin{bmatrix} x(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x(1) & x(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(q) & x(q-1) & x(q-2) & \cdots & x(q-p) \\ x(q+1) & x(q) & x(q-1) & \cdots & x(q+1-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(N-1) & x(N-2) & x(N-3) & \cdots & x(N-1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.16.3})$$

将  $p = 2, q = 2$  和  $\{x(n)\} = \{1, -2, 3, -4, 5\}$  代入矩阵方程式 (题 3.16.3), 则

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.16.4})$$

这个方程的最后两个式子可合写为

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解之, 得

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1$$

将这些结果代入式 (题 3.16.4) 的前三个方程, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0$$

**答案:** 线性离散时间系统是一个全极点模型, 即 AR 模型:

$$H(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}$$

**题 3.17** 由于对于零均值 MA( $q$ ) 过程而言,

$$\begin{aligned} b_0^2 + b_1 + \cdots + b_q &= R(0) \\ b_0 b_1 + b_1 b_2 + \cdots + b_{q-1} b_q &= R(1) \\ &\vdots \\ b_0 b_q &= R(q) \end{aligned}$$

故由题意知, MA(2) 过程的自相关函数为

$$R(0) = 3, \quad R(1) = R(-1) = 2, \quad R(2) = R(-2) = 1, \quad R(k) = 0, \quad \forall |k| > 2$$

由此不难求得 MA(2) 过程的功率谱

$$P(z) = \sum_{k=-2}^2 R(k)z^{-k} = z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

其因式分解为

$$P(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2})(1 + z + z^2)$$

将这一结果与  $P(z) = B(z)B(z^{-1})$  比较, 立即知

$$B(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

即

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1$$

答案: MA(2) 过程的 MA 参数为

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1$$

**题 3.18** 由  $c(k)$  的定义及因果系统  $h(k) = 0, \forall k < 0$  知  $c(k) = 0, \forall k > q$ . 因此, 修正 Yule-Walker 方程可写作

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(-1) & \cdots & R(-p) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R(q) & R(q-1) & \cdots & R(q-p) \\ R(q+1) & R(q) & \cdots & R(q+1-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R(q+p) & R(q+p-1) & \cdots & R(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ \vdots \\ c(q) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.18.1})$$

并且

$$C(z) = c(0) + c(1)z^{-1} + \cdots + c(q)z^{-q} \quad (\text{题 3.18.2})$$

对  $c(k)$  的定义式

$$c(k) = \sum_{i=0}^q b(i)h(i-k)$$

两边作  $Z$  变换, 并利用  $h(l) = 0, \forall l < 0$ , 则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)z^{-k} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^q b(i)h(i-k)z^{-k} \\ &= \sum_{i=0}^q b(i)z^{-i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(i-k)z^{i-k} \\ &= \sum_{i=0}^q b(i)z^{-i} \sum_{l=0}^{\infty} h(l)z^l \\ &= B(z)H(z^{-1}) \end{aligned}$$

即

$$C(z) = B(z)H(z^{-1}) = B(z)\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

从而有

$$A(z^{-1})C(z) = B(z)B(z^{-1}) \quad (\text{题 3.18.3})$$

这表明, 因果 ARMA 过程的 MA 参数可以通过求解式 (题 3.18.3) 获得.

将已知的自相关函数  $R(0) = 3$ ,  $R(1) = R(-1) = 2$  和  $R(2) = R(-2) = 1$  代入式 (题 3.18.1), 有

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.18.4})$$

由第三个方程

$$1 + 2a_1 = 0$$

得  $a_1 = -\frac{1}{2}$ . 将它代入式 (题 3.18.4), 由其中的前两个方程

$$\begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

即得  $c(0) = 2$  和  $c(1) = 0.5$ . 需要注意

$$C(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)z^{-k} = \cdots + 2 + \frac{1}{2}z^{-1}$$

因为  $c(-k) \neq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

将  $a_1 = -\frac{1}{2}$  和  $c(0) = 2$ ,  $c(1) = \frac{1}{2}$  代入式 (题 3.18.3), 则

$$\begin{aligned} B(z)B(z^{-1}) &= C(z)A(z^{-1}) \\ &= \left(\cdots + 2 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{2}z\right) \\ &= \cdots + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} \end{aligned}$$

但是, 由于  $B(z)B(z^{-1})$  是一个正幂次和负幂次系数相等, 即具有对称性的多项式, 故

$$\begin{aligned} B(z)B(z^{-1}) &= \frac{1}{2}z + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} \\ &= (0.396 + 1.262z^{-1})(0.396 + 1.262z) \end{aligned}$$

即有  $b_0 = 0.396$  和  $b_1 = 1.262$ .

**答案:** 线性系统的传递函数的具体表达式为

$$H(z) = \frac{0.396 + 1.262z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

**题 3.19** <sup>[40]</sup> 不妨令  $H(z) = B(z)/A(z)$  的极点为  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , 即

$$1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p} = \prod_{i=1}^p (z^{-1} - z_i)$$

由 Prony 方法, 我们用复指数模型

$$x(n) \approx c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_p z_p^n \quad (\text{题 3.19.1})$$

逼近信号  $x(n)$ .

下面分两种情况讨论如何求式 (题 3.19.1) 中的系数  $c_1, c_2, \dots, c_p$ .

情况 1: 若极点各不相同, 则用式 (题 3.19.1) 拟合已知数据序列  $\{x(n), n = 0, 1, \dots, N-1\}$  得矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.19.2})$$

情况 2: 若极点存在多重度, 例如极点  $z_1$  有二个, 则式 (题 3.19.1) 变为

$$x(n) \approx c_1 z_1^n + c_2 n z_1^n + c_3 z_3^n + \dots + c_p z_p^n \quad (\text{题 3.19.3})$$

拟合已知数据序列的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_1 & z_3 & \dots & z_p \\ z_1^2 & 2z_1^2 & z_3^2 & \dots & z_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & (N-1)z_1^{N-1} & z_3^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.19.4})$$

针对本习题, 由于已知数据序列与题 3.16 中的序列相同, 所以线性离散时间系

统与题 3.16 中的也相同, 即

$$H(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}$$

易知, 其极点为  $z_1 = z_2 = -1$ . 因此, 由式 (题 3.19.3) 知, 信号  $x(n)$  的复指数拟合模型为

$$x(n) = c_1(-1)^n + c_2n(-1)^n \quad (\text{题 3.19.5})$$

相对应地, 由式 (题 3.19.4) 又有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ (-1)^2 & 2(-1)^2 \\ (-1)^3 & 3(-1)^3 \\ (-1)^4 & 4(-1)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解之, 得  $c_1 = 1$  和  $c_2 = 1$ . 因此, 信号模型为

$$\begin{aligned} x(n) &= (-1)^n + n(-1)^2 \\ &= (-1)^n(1+n), \quad 0 \leq n \leq 4 \end{aligned}$$

**答案:** 拟合已知数据序列  $\{x(n)\} = \{1, -2, 3, -4, 5\}$  的信号模型为

$$x(n) = (-1)^n(1+n), \quad 0 \leq n \leq 4$$

**题 3.20** 对于复函数  $|f(x)|^2 = f(x)f^*(x)$  的求导, 我们有

$$\frac{\partial |f(x)|^2}{\partial x} = \frac{\partial |f(x)|^2}{\partial f(x)} \frac{f(x)}{\partial x} = f^*(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

和

$$\frac{\partial |f(x)|^2}{\partial x} = \frac{\partial |f(x)|^2}{\partial f^*(x)} \frac{f^*(x)}{\partial x} = f(x) \frac{\partial f^*(x)}{\partial x}$$

(1) 由题意, 令  $\frac{\partial P_m(r_m)}{\partial r_m^*} = 0$ , 并运用求导的链式法则, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m(r_m)}{\partial r_m^*} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_m^*} \mathbb{E} \left\{ \left| e_{m-1}^f(n) + r_m e_{m-1}^b(n-1) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. \left| r_m^* e_{m-1}^f(n-1) + e_{m-1}^b(n-1) \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

具体计算之, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m(r_m)}{\partial r_m^*} &= \frac{1}{2} E \left\{ [e_{m-1}^f(n) + r_m e_{m-1}^b(n-1)] \frac{\partial}{\partial r_m^*} [e_{m-1}^f(n) + r_m e_{m-1}^b(n-1)]^* + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} [r_m^* e_{m-1}^f(n) + e_{m-1}^b(n-1)]^* \frac{\partial}{\partial r_m^*} [r_m^* e_{m-1}^f(n) + e_{m-1}^b(n-1)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} E \left\{ [e_{m-1}^f(n) + r_m e_{m-1}^b(n-1)] e_{m-1}^{b*}(n-1) + \right. \\ &\quad \left. [r_m^* e_{m-1}^f(n) + e_{m-1}^b(n-1)]^* e_{m-1}^f(n) \right\} \\ &= \frac{1}{2} E \left\{ r_m [ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 ] + 2e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1) \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

由此得

$$r_m = \min_{r_m} [P_m(r_m)] = \frac{-2E \{ e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1) \}}{E \{ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 \}} \quad (\text{题 3.20.1})$$

(2) 假定只有数据  $x(1), x(2), \dots, x(N)$  可以利用. 由于  $m$  阶前、后向预测误差分别定义为

$$\begin{aligned} e_m^f(n) &= x(n) - \hat{x}(n) = \sum_{i=0}^m a_i^{(m)} x(n-i) \\ e_m^b(n) &= x(n-m) - \hat{x}(n-m) = \sum_{i=0}^m a_i^{(m)*} x(n-m+i) \end{aligned}$$

可见, 为了前向预测  $x(n)$ , 必须已知  $(m-1)$  个数据  $x(n-m+1), x(n-m+2), \dots, x(n-1)$ ; 而为了后向预测  $x(n-m)$ , 必须已知  $(m-1)$  个数据  $x(n-m+1), x(n-m+2), \dots, x(n-1)$ . 为了后向预测  $x(1)$ , 必须已知  $x(2), x(3), \dots, x(m)$ ; 而为了前向预测  $x(m)$ , 又必须已知  $x(1), x(2), \dots, x(m-1)$ . 因此, 为了使  $m$  阶前、后向预测得以同时进行, 通常要求已知数据  $x(1), x(2), \dots, x(m)$ , 即认为

$$e_m^f(n) = e_m^b(n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m \quad (\text{题 3.20.2})$$

另一方面, 当只有  $N$  个数据  $x(1), x(2), \dots, x(N)$  已知时, 我们有估计值

$$\hat{E} \{ e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1) \} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1) \quad (\text{题 3.20.3})$$

和

$$\begin{aligned} & \hat{E} \{ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^{b*}(n-1)|^2 \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 \end{aligned} \quad (\text{题 3.20.4})$$

将式 (题 3.20.2) 代入式 (题 3.20.3) 得

$$\hat{E} \{ e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1) \} = \frac{1}{N} \sum_{n=m+1}^N e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1) \quad (\text{题 3.20.5})$$

而将式 (题 3.20.2) 代入式 (题 3.20.4) 后, 则有

$$\begin{aligned} & \hat{E} \{ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=m+1}^N |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 \end{aligned} \quad (\text{题 3.20.6})$$

用式 (题 3.20.5) 和式 (题 3.20.6) 代替式 (题 3.20.1) 中的数学期望值, 立即得到

$$r_m = \frac{-2 \sum_{n=m+1}^N e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1)}{\sum_{n=m+1}^N [ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 ]}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{题 3.20.7})$$

(3) 由

$$\sum_{n=m+1}^N |e_{m-1}^f(n) - e_{m-1}^b(n-1)|^2 > 0$$

知

$$\sum_{n=m+1}^N [ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 ] \geq \sum_{n=m+1}^N 2 |e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^b(n-1)|$$

利用这一结果, 易知

$$\begin{aligned}
 |r_m| &= \left| \frac{-2 \sum_{n=m+1}^N e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1)}{\sum_{n=m+1}^N [ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 ]} \right| \\
 &= \frac{\left| \sum_{n=m+1}^N 2e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^{b*}(n-1) \right|}{\left| \sum_{n=m+1}^N [ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 ] \right|} \\
 &< \frac{\sum_{n=m+1}^N 2|e_{m-1}^f(n) e_{m-1}^b(n-1)|}{\sum_{n=m+1}^N [ |e_{m-1}^f(n)|^2 + |e_{m-1}^b(n-1)|^2 ]} < 1
 \end{aligned}$$

这就证明了  $|r_m| < 1$  对  $m = 1, 2, \dots$  恒成立.

**题 3.21** 由题意知, 三阶滤波器的冲激响应系数向量

$$\mathbf{a}_3 = [1, 0.5, -0.1, -0.5]^T \quad (\text{题 3.21.1})$$

而反射系数  $K_3 = a_3(3) = -0.5$ .

由 Levinson 递推公式 (向下递推)

$$\begin{aligned}
 a_m(i) &= \frac{1}{1 - |K_{m+1}|^2} [a_{m+1}(i) - K_{m+1} a_{m+1}(m - i + 1)] \\
 &\quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{题 3.21.2})
 \end{aligned}$$

于是, 由三阶下推二阶预测滤波器系数时, 我们有

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} &= \frac{1}{1 - K_3^2} \left( \begin{bmatrix} a_3(1) \\ a_3(2) \end{bmatrix} - K_3 \begin{bmatrix} a_3(2) \\ a_3(1) \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{1 - 0.25} \left( \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.21.3})
 \end{aligned}$$

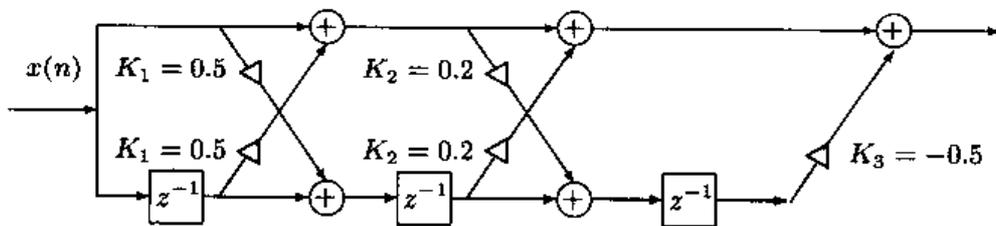
且反射系数  $K_2 = a_2(2) = 0.2$ .

再次使用 Levinson 向下递推公式 (题 3.21.3), 可以得到由二阶下推一阶预测滤波器系数的公式如下:

$$\begin{aligned} a_1(1) &= \frac{1}{1 - K_2^2} [a_2(1) - K_2 a_2(1)] \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

因此  $K_1 = a_1(1) = 0.5$ .

综合以上结果, 格型滤波器的各级反射系数为  $K_1 = 0.5$ ,  $K_2 = 0.2$  和  $K_3 = -0.5$ . 由此可画出格型滤波器的结构图如图题 3.21.



图题 3.21 三级格型滤波器

答案: 格型滤波器的实现图如图题 3.21 所示.

题 3.22 由题意知

$$p(x_1) = p(0) = \frac{1}{5}, \quad p(x_2) = p(1) = \frac{2}{3}, \quad p(x_3) = p(2) = \frac{2}{15}$$

(1) 对于信道 1, 由图题 3.22 知, 条件概率为

$$\begin{aligned} p(y_1|x_1) &= 1, & p(y_1|x_2) &= 0, & p(y_1|x_3) &= \frac{1}{3} \\ p(y_2|x_1) &= 0, & p(y_2|x_2) &= 1, & p(y_2|x_3) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

由全概率公式, 得

$$\begin{aligned} p(y_1) &= p(y_1|x_1)p(x_1) + p(y_1|x_2) + p(y_1|x_3) \\ &= \frac{1}{5} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{11}{45} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} p(y_2) &= p(y_2|x_1)p(x_1) + p(y_2|x_2) + p(y_2|x_3) \\ &= 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{34}{45} \end{aligned}$$

于是,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$  和  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$  之间的平均互信息为

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 p(y_j|x_i)p(x_i) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \\ &= 1 \times \frac{1}{5} \log \frac{1}{\frac{11}{45}} + 1 \times \frac{2}{3} \log \frac{1}{\frac{34}{45}} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{15} \log \frac{\frac{2}{3}}{\frac{34}{45}} \\ &= \frac{28}{15} \log 3 + \log 5 - \frac{2}{3} \log 2 - \frac{11}{45} \log 11 - \frac{34}{45} \log 17 \end{aligned}$$

(2) 对于信道 2, 由图题 3.22 知, 条件概率为

$$\begin{aligned} p(z_1|x_1) &= 1, & p(z_1|x_2) &= \frac{1}{2}, & p(z_1|x_3) &= 0 \\ p(z_2|x_1) &= 0, & p(z_2|x_2) &= \frac{1}{2}, & p(z_2|x_3) &= \frac{1}{2} \\ p(z_3|x_1) &= 0, & p(z_3|x_2) &= 0, & p(z_3|x_3) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

由全概率公式, 得

$$\begin{aligned} p(z_1) &= p(z_1|x_1)p(x_1) + p(z_1|x_2)p(x_2) + p(z_1|x_3)p(x_3) \\ &= 1 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{8}{15} \\ p(z_2) &= p(z_2|x_1)p(x_1) + p(z_2|x_2)p(x_2) + p(z_2|x_3)p(x_3) \\ &= 0 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} p(z_3) &= p(z_3|x_1)p(x_1) + p(z_3|x_2)p(x_2) + p(z_3|x_3)p(x_3) \\ &= 0 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

于是,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$  和  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$  之间的平均互信息为

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}; \mathbf{z}) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p(x_i, z_j) \log \frac{p(x_i, z_j)}{p(x_i)p(z_j)} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p(z_j|x_i)p(x_i) \log \frac{p(z_j|x_i)}{p(z_j)} \\ &= 1 \times \frac{1}{5} \log \frac{1}{\frac{1}{15}} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \log \frac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{15}} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \log \frac{\frac{2}{2}}{\frac{1}{5}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \times \frac{2}{15} \log \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{15} \log \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{15}} \\ &= \frac{3}{5} \log 3 + \log 5 - \frac{14}{5} \log 2 \end{aligned}$$

(3) 随机变量组  $\mathbf{x}$  的熵

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}) &= - \sum_{i=1}^3 p(x_i) \log p(x_i) \\ &= -\frac{1}{5} \log \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} - \frac{2}{15} \log \frac{2}{15} \\ &= \frac{1}{5} \log 5 - \frac{2}{3} \log 2 + \frac{2}{3} \log 3 - \frac{2}{15} \log 2 + \frac{2}{15} (\log 3 + \log 5) \\ &= \frac{1}{3} \log 5 + \frac{4}{5} \log 3 - \frac{4}{5} \log 2 \end{aligned}$$

随机变量组  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$  的熵

$$\begin{aligned} H(\mathbf{y}) &= - \sum_{i=1}^2 p(y_i) \log p(y_i) \\ &= -\frac{11}{45} \log \frac{11}{45} - \frac{34}{45} \log \frac{34}{45} \\ &= \log 5 + 2 \log 3 - \frac{34}{45} \log 2 - \frac{11}{45} \log 11 - \frac{34}{45} \log 17 \end{aligned}$$

随机变量组  $z$  的熵

$$\begin{aligned} H(z) &= -\sum_{i=1}^3 p(z_i) \log p(z_i) \\ &= -\frac{8}{15} \log \frac{8}{15} - \frac{2}{5} \log \frac{2}{5} - \frac{1}{15} \log \frac{1}{15} \\ &= \frac{3}{5} \log 3 + \log 5 - 2 \log 2 \end{aligned}$$

答案: 互信息  $I(x; y)$  和  $I(x; z)$  分别为

$$\begin{aligned} I(x; y) &= \frac{28}{15} \log 3 + \log 5 - \frac{2}{3} \log 2 - \frac{11}{45} \log 11 - \frac{34}{45} \log 17 \\ I(x; z) &= \frac{3}{5} \log 3 + \log 5 - \frac{14}{5} \log 2 \end{aligned}$$

熵  $H(x)$ ,  $H(y)$  和  $H(z)$  分别为

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{3} \log 5 + \frac{4}{5} \log 3 - \frac{4}{5} \log 2 \\ H(y) &= \log 5 + 2 \log 3 - \frac{34}{45} \log 2 - \frac{11}{45} \log 11 - \frac{34}{45} \log 17 \\ H(z) &= \frac{3}{5} \log 3 + \log 5 - 2 \log 2 \end{aligned}$$

题 3.23 (1) 由题意知, 张成噪声子空间的矩阵  $V_n$  分块为

$$V = \begin{bmatrix} v^T \\ V \end{bmatrix}$$

于是

$$\bar{p} = V_n \alpha = \begin{bmatrix} v^T \\ V \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \bar{p}_0 \\ \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_{2M} \end{bmatrix}$$

即有

$$\begin{aligned} v^T \alpha &= \bar{p}_0 \\ V \alpha &= \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_{2M} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于  $p$  是由  $\bar{p}$  除第一个元素以外的其他元素组成的向量, 故

$$p \stackrel{\text{def}}{=} [p_1, p_2, \dots, p_{2M}]^T = [\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{2M}]^T$$

进而有

$$V\alpha = p = [p_1, p_2, \dots, p_{2M}]^T \quad (\text{题 3.23.2})$$

由于希望选择  $\alpha$  使得  $\bar{p} = V_n \alpha$  的元素满足  $\bar{p}_0 = 1$  和  $\sum_{k=1}^{2M} \bar{p}_k^2 = \min$ , 而  $\alpha^T V^T V \alpha = \sum_{k=1}^{2M} \bar{p}_k^2$ , 所以  $\alpha$  是下列优化问题的解:

$$\alpha = \arg \min (\alpha^T V^T V \alpha) = \min \quad (\text{题 3.23.3})$$

约束条件为

$$v^T \alpha = 1 \quad (\text{题 3.23.4})$$

(2) 利用 Lagrange 乘子法, 构造目标函数

$$J(\alpha, \lambda) = \alpha^T V^T V \alpha + \lambda(1 - v^T \alpha)$$

由  $\frac{\partial J(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = 0$  得  $V^T V \alpha - \lambda v = 0$ , 即有

$$\alpha = \lambda(V^T V)^{-1} v \quad (\text{题 3.23.5})$$

将式 (题 3.23.5) 代入约束条件式 (题 3.23.4), 可求得

$$\lambda v^T (V^T V)^{-1} v = 1$$

或

$$\lambda = \frac{1}{v^T (V^T V)^{-1} v} \quad (\text{题 3.23.6})$$

综合式 (题 3.23.5) 和式 (题 3.23.6) 知

$$\alpha = \frac{(V^T V)^{-1} v}{v^T (V^T V)^{-1} v} \quad (\text{题 3.23.7})$$

(3) 将式 (题 3.23.7) 代入式 (题 3.23.2), 易知

$$p = \frac{V(V^T V)^{-1} v}{v^T (V^T V)^{-1} v} \quad (\text{题 3.23.8})$$

式 (题 3.23.7) 和式 (题 3.23.8) 正是本习题需要证明的两个结果. 证毕.

**题 3.24** 由于滤波器只有一个极点和一个零点,不妨令其传递函数为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (\text{题 3.24.1})$$

Prony 方法的法方程为

$$\begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & \cdots & r(0,p) \\ r(1,0) & r(1,1) & \cdots & r(1,p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(p,0) & r(p,1) & \cdots & r(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.24.2})$$

式中

$$r(i,j) = \sum_{n=p}^{N-1} x(n-j)x^*(n-i), \quad i, j = 0, 1, \dots, p \quad (\text{题 3.24.3})$$

由于  $p = 1$ , 故由式 (题 3.24.2) 和式 (题 3.24.3), 立即可以得到

$$a_1 r(1,1) = -r(1,0) \quad (\text{题 3.24.4})$$

其中

$$r(1,1) = \sum_{n=1}^{N-1} x^2(n-1) = N-1 \quad (\text{题 3.24.5})$$

$$r(1,0) = \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x(n-1) = N-2 \quad (\text{题 3.24.6})$$

将式 (题 3.24.5) 和式 (题 3.24.6) 代入式 (题 3.24.4), 则有

$$a_1 = -\frac{r(1,0)}{r(1,1)} = -\frac{N-2}{N-1} \quad (\text{题 3.24.7})$$

即滤波器传递函数  $H(z)$  的分母为

$$A(z) = 1 - \frac{N-2}{N-1} z^{-1} \quad (\text{题 3.24.8})$$

由题意,  $x(n)$  是以单位信号为输入时滤波器  $H(z)$  的输出, 即  $x(n)$  是一个 ARMA(1,1) 过程:

$$x(n) + a_1 x(n-1) = b_0 e(n) + b_1 e(n-1) = b_0 \quad (\text{题 3.24.9})$$

式中

$$e(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 3.24.10})$$

于是, 当  $n = 0$  时, 式 (题 3.24.10) 给出结果  $x(0) = b_0 = 1$ ; 而当  $n = 1$  时, 则有

$$x(1) + a_1 x(0) = b_0 e(1) + b_1 e(0)$$

将  $x(1) = x(0) = 1$  以及  $e(1) = 0, e(0) = 1$  代入上式, 得

$$b_1 = 1 - \frac{N-2}{N-1} = \frac{1}{N-1}$$

因此, 滤波器传递函数为

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{N-1} z^{-1}}{1 - \frac{N-2}{N-1} z^{-1}} \quad (\text{题 3.24.11})$$

当  $N = 21$  时, 上式给出下面的具体结果:

$$H(z) = \frac{1 + 0.05z^{-1}}{1 - 0.95z^{-1}} \quad (\text{题 3.24.12})$$

**答案:** 滤波器传递函数由式 (题 3.24.11) 给出。当  $N = 21$  时, 滤波器的传递函数由式 (题 3.24.12) 描述。

**题 3.25** 与题 3.24 相类似, 由于阶数  $p = 1$ , 故有

$$a_1 r(1, 1) = -r(1, 0) \quad (\text{题 3.25.1})$$

注意到观测数据向量形式意味着共有  $n = 0, 1, \dots, N$  个数据, 所以

$$r(1, 1) = \sum_{n=1}^N x(n-1)x^*(n-1) = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1 - |\alpha|^{2N}}{1 - |\alpha|^2} \quad (\text{题 3.25.2})$$

$$r(1, 0) = \sum_{n=1}^N x(n)x^*(n-1) = \frac{\alpha(1 - |\alpha|^{2N})}{1 - |\alpha|^2} \quad (\text{题 3.25.3})$$

将式 (题 3.25.2) 和式 (3.25.3) 代入式 (题 3.25.1), 则有

$$a_1 = -\frac{r(1, 0)}{r(1, 1)} = -\frac{\frac{\alpha(1 - |\alpha|^{2N})}{1 - |\alpha|^2}}{\frac{1 - |\alpha|^{2N}}{1 - |\alpha|^2}} = -\alpha \quad (\text{题 3.25.4})$$

又由 AR(1) 模型

$$x(n) + a_1 x(n-1) = b_0 e(n)$$

令  $n = 0$ , 则

$$x(0) + a_1 x(-1) = b_0 e(1)$$

故有  $b_0 = x(0) = 1$ . 因此, 滤波器传递函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (\text{题 3.25.5})$$

**答案:**  $a_1 = -\alpha$  和  $b_0 = 1$ , 并且滤波器的传递函数由式 (题 3.25.5) 确定.

**题 3.26** 下面分 (1) 和 (2) 两部分证明.

(1) 将题给的  $J_a$  展开为

$$\begin{aligned} J_a &= \frac{1}{2} \mathbf{E}\{y^2(k)\} = \frac{1}{2} \mathbf{E}\{\mathbf{a}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{a}\} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{E}\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T\} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{R}_x \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{题 3.26.1})$$

由于  $\mathbf{R}_x = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{Q}^T$ , 而  $\mathbf{Q}$  为正交矩阵, 即  $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , 故有

$$J_a = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{Q}^T \mathbf{a} \quad (\text{题 3.26.2})$$

记

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_n]^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{a} \quad (\text{题 3.26.3})$$

并将式 (题 3.26.3) 代入式 (题 3.26.2), 则

$$\begin{aligned} J_a &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n w_i^2 \lambda_i \end{aligned} \quad (\text{题 3.26.4})$$

但由式 (题 3.26.3) 知

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q} \mathbf{w} \quad (\text{题 3.26.5})$$

从而有

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{w}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{w}$$

将约束条件  $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1$  代入上式, 立即得到  $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1$ , 即

$$\sum_{i=0}^n w_i^2 = 1$$

(2) 使  $J_a$  最小化的向量  $a$  由式 (题 3.26.5) 给出, 即  $a = Qw$ . 考查

$$\begin{aligned} R_x a &= Q \Sigma Q^T Q w \\ &= Q \Sigma w \end{aligned} \quad (\text{题 3.26.6})$$

当  $w = [1, 0, \dots, 0]^T$  时, 容易验证

$$\Sigma w = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.26.7})$$

将式 (题 3.26.7) 代入式 (题 3.26.6), 得

$$R_x a = Q \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \lambda_0 Q w = \lambda_0 a \quad (\text{题 3.26.8})$$

上式表明, 向量  $a$  是矩阵  $R_x$  与最小特征值  $\lambda_0$  对应的特征向量. 若令  $a_0$  是这一特征向量, 则有  $a = a_0$ .

这样就完成了本习题的全部证明.

**题 3.27** (1) 使用接收机输出能量作代价函数

$$J_{MV}(f) = E\{|\hat{w}_1(n)|^2\} = f^H R_y f \quad (\text{题 3.27.1})$$

式中  $R_y = E\{y(n)y^H(n)\}$  代表接收信号向量的自相关矩阵. 于是, 最小方差接收机的设计可以用带约束的优化问题描述为

$$f = \arg \min J_{MV} = \arg \min f^H R_y f \quad (\text{题 3.27.2})$$

约束条件为  $f^H h_1 = 1$ .

利用 Lagrange 乘子法, 构造目标函数

$$J = f^H R_y f + \lambda(1 - f^H h_1) \quad (\text{题 3.27.3})$$

求  $J$  相对于  $f^H$  的导数, 并令结果为零, 则有

$$R_y f - \lambda h_1 = 0$$

即

$$\mathbf{f}_{\text{MV}} = \lambda \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{h}_1 \quad (\text{题 3.27.4})$$

将式 (题 3.27.4) 代入约束条件  $\mathbf{f}^H \mathbf{h}_1 = 1$ , 即可得到 Lagrange 乘数

$$\lambda = (\mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{h}_1)^{-1} \quad (\text{题 3.27.5})$$

综合式 (题 3.27.4) 和式 (题 3.27.5), 立即得到最小方差接收机的表达式为

$$\mathbf{f}_{\text{MV}} = \frac{\mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{h}_1}{\mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{h}_1} \quad (\text{题 3.27.6})$$

最小方差接收机的最小输出能量 (MOE) 为

$$\begin{aligned} \text{MOE}(\mathbf{h}_1) &= \mathbf{E}\{|\hat{w}_1|^2\} = \mathbf{f}_{\text{MV}}^H \mathbf{E}\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\} \mathbf{f}_{\text{MV}} \\ &= \mathbf{f}_{\text{MV}}^H \mathbf{R}_y \mathbf{f}_{\text{MV}} \\ &= \frac{1}{\mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{h}_1} \end{aligned} \quad (\text{题 3.27.7})$$

(2) 当用户 1 为期望用户时, Capon 的 MVDR 波束形成器是一个最小输出能量的接收机, 即

$$\mathbf{h}_1 = \arg \min[\text{MOE}(\mathbf{h}_1)] = \arg \min_{\mathbf{h}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{g}_1} \frac{1}{\mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{h}_1} \quad (\text{题 3.27.8})$$

并服从约束条件

$$\mathbf{h}_1^H \mathbf{h}_1 = 1 \quad (\text{题 3.27.9})$$

用式 (题 3.27.9) 代替式 (题 3.27.8) 的分子, 则有

$$\mathbf{g}_1 = \arg \min_{\mathbf{h}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{g}_1} \frac{\mathbf{h}_1^H \mathbf{h}_1}{\mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{h}_1} \quad (\text{题 3.27.10})$$

显然, 如果令  $\mathbf{h} = \mathbf{C}_1 \mathbf{g}$ , 则对所有的用户而言,  $\max(\mathbf{g}) = \mathbf{g}_1$ , 因此, 式 (题 3.27.10) 变为

$$\mathbf{g}_{\text{Capon}} = \arg \max_{\mathbf{h} = \mathbf{C}_1 \mathbf{g}} \frac{\mathbf{h}^H \mathbf{h}}{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{h}} = \arg \max_{\mathbf{g}} \frac{\mathbf{g}^H \mathbf{C}_1^H \mathbf{C}_1 \mathbf{g}}{\mathbf{g}^H \mathbf{C}_1^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{g}}$$

上式的最大化可以等价写作下面的最小化:

$$\mathbf{g}_{\text{Capon}} = \arg \min_{\mathbf{g}} \frac{\mathbf{g}^H \mathbf{C}_1^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{g}}{\mathbf{g}^H \mathbf{C}_1^H \mathbf{C}_1 \mathbf{g}} \quad (\text{题 3.27.11})$$

答案:

(1) 最小方差接收机由式 (题 3.27.6) 给出.

(2) 由于式 (题 3.27.11) 是一个典型的广义 Rayleigh 熵问题, 它等价于矩阵束  $\{C_1^H R_y^{-1} C_1, C_1^H C_1\}$  的广义特征值问题. 也就是说, Capon 的 MVDR 波束形成器  $g_{\text{Capon}}$  就是矩阵束  $\{C_1^H R_y^{-1} C_1, C_1^H C_1\}$  与最小广义特征值对应的广义特征向量.

题 3.28 由已知条件知, 噪声方差  $\sigma^2$  为

$$\sigma^2 = 1$$

并且噪声特征向量为

$$g = e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{aligned} gg^H &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(1) 下面使用 MUSIC 空间谱求空间参数  $\omega$

MUSIC 空间谱可计算为

$$P_{\text{MUSIC}}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega) g g^H \mathbf{a}(\omega)}$$

由方向向量

$$\mathbf{a}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega} \\ e^{j2\omega} \end{bmatrix}$$

的结构易知, 当  $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$  时, 方向向量

$$\mathbf{a}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm j \\ -1 \end{bmatrix}$$

此时, MUSIC 空间谱的分母

$$\mathbf{a}^H(\omega) \mathbf{g} \mathbf{g}^H \mathbf{a} = [1, \mp j, -1] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm j \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

因此, MUSIC 空间谱谱峰对应的空间参数为  $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$ .

(2) 使用求根 MUSIC 方法确定空间参数  $\omega$

令

$$\mathbf{p} = [1, z, z^2]^T$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^H \mathbf{g} \mathbf{g}^H \mathbf{p} &= [1, z^{-1}, z^{-2}] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix} \\ &= \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-2}, 0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-2} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix} \\ &= 1 + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{2}z^2 \end{aligned}$$

构造求根 MUSIC 多项式:

$$p(z) = 2z^2 \mathbf{p}^H \mathbf{g} \mathbf{g}^H \mathbf{p} = 1 + 2z^2 + z^4$$

其根为  $z = e^{j\omega} = \pm j$ , 即  $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$ .

**答案:** 使用 MUSIC 空间谱和求根 MUSIC 方法求得的空间参数相同, 均为  $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$ .

题 3.29 向量  $d$  的范数

$$\|d\|^2 = d^H d \quad (\text{题 3.29.1})$$

由酉矩阵  $U = [S, G]$  的结构易知, 噪声特征矩阵  $G$  的投影矩阵

$$P_{\text{noise}} = G(G, G)^{-1} G^H = GG^H \quad (\text{题 3.29.2})$$

由题给条件, 向量  $d$  必须满足两个约束条件:

(1)  $d$  必须位于噪声子空间, 这意味着  $d$  可以表示成  $d$  在噪声子空间上的投影, 即有

$$d = P_{\text{noise}} d \quad (\text{题 3.29.3})$$

(2)  $d$  的第一个元素等于 1, 这意味着

$$d^H e_1 = 1 \quad (\text{题 3.29.4})$$

式中  $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ .

利用式 (题 3.29.2) 和式 (题 3.29.3) 易得

$$\begin{aligned} d^H e_1 &= (P_{\text{noise}} d)^H e_1 \\ &= (GG^H d)^H e_1 \\ &= d^H GG^H e_1 \end{aligned}$$

将上式代入式 (题 3.29.4), 便可将上述两个约束条件合并写作

$$d^H GG^H e_1 = 1 \quad (\text{题 3.29.5})$$

这样一来, 确定向量  $d$  的问题即变成带约束的优化问题: 在条件 (题 3.29.5) 式的约束下, 使式 (题 3.29.1) 的范数最小化. 令  $\mu$  为 Lagrange 乘子, 可构造代价函数为

$$J = d^H d + \mu(1 - d^H GG^H e_1) \quad (\text{题 3.29.6})$$

由偏导

$$\frac{\partial J}{\partial d^*} = d - \mu GG^H e_1 = 0$$

得

$$d = \mu GG^H e_1 \quad (\text{题 3.29.7})$$

对矩阵  $G$  作分块:

$$G = \begin{bmatrix} g_1^H \\ G_1 \end{bmatrix}$$

则由式 (题 3.29.7) 和约束条件式 (题 3.29.4) 得

$$\begin{aligned} d^H e_1 &= \mu G G^H e_1 \\ &= \mu \begin{bmatrix} g_1^H g_1 & g_1^H G_1^H \\ G_1 g_1 & G_1 G_1^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \mu g_1^H g_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

从而有

$$\mu = \frac{1}{g_1^H g_1} \quad (\text{题 3.29.8})$$

另一方面, 根据  $G$  的分块易知

$$G^H e_1 = \begin{bmatrix} g_1 & G_1^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = g_1 \quad (\text{题 3.29.9})$$

将式 (题 3.29.8) 和式 (题 3.29.9) 代入式 (题 3.29.7), 则

$$d = \frac{1}{g_1^H g_1} G g_1 \quad (\text{题 3.29.10})$$

式中

$$G g_1 = \begin{bmatrix} g_1^H g_1 \\ G_1 g_1 \end{bmatrix}$$

将上式代入式 (题 3.29.10), 得

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ G_1 g_1 / (g_1^H g_1) \end{bmatrix} \quad (\text{题 3.29.11})$$

**答案:** 确定空间参数  $\omega$  的最小范数向量为

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ G_1 g_1 / (g_1^H g_1) \end{bmatrix}$$

## 第 4 章 自适应滤波器

本章的核心内容是滤波器的优化设计及其自适应实现，包括以下几种不同的滤波器：

- 基于信噪比最大原则的匹配滤波器；
- 基于最小均方误差准则的 Wiener 滤波器；
- 基于状态空间方程的 Kalman 自适应滤波器；
- 最小均方误差 (LMS) 自适应滤波器；
- 递推最小二乘 (RLS) 自适应滤波器；
- 具有对称结构的 LMS 格型自适应滤波器；
- 具有非对称结构的 LS 格型自适应滤波器。

自适应滤波器的典型应用包括

- 自适应谱线增强器与陷波器；
- 广义旁瓣对消器。

### 4.1 主要理论与方法

考查观测信号

$$y(t) = s(t) + n(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (4.1.1)$$

式中， $s(t)$  为感兴趣的信号； $n(t)$  为零均值的加性平稳噪声。所谓滤波器，就是能够从含噪声的观测数据  $y(t)$  中抽取出信号  $s(t)$  的硬件或软件装置。

#### 4.1.1 匹配滤波器

##### 1. 匹配滤波问题

匹配滤波问题的描述：设计一滤波器  $H(\omega)$  使得其输出

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)h(t-\tau)d\tau = s_0(t) + n_0(t) \quad (4.1.2)$$

达到信噪比最大，式中  $h(t)$  是滤波器  $H(\omega)$  的系数，且

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.1.3)$$

和

$$n_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.1.4)$$

## 2. 信噪比

滤波器在时间  $T_0$  的信噪比

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{输出在 } t = T_0 \text{ 时的瞬时信号功率}}{\text{输出噪声的平均功率}} = \frac{s_0^2(T_0)}{E\{n_0^2(t)\}} \quad (4.1.5)$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{P_n(\omega)} d\omega \quad (4.1.6)$$

式中取等号的条件是

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{S(-\omega)}{P_n(\omega)} e^{-j\omega T_0} \quad (4.1.7)$$

这里  $S(\omega)$  是信号  $s(t)$  的频谱,  $S(-\omega) = S^*(\omega)$ .

## 3. 匹配滤波器设计

当加性噪声  $n(t)$  为白噪声时, 使信噪比最大的滤波器为

$$H_0(\omega) = S(-\omega)e^{-j\omega T_0} \quad (4.1.8)$$

从而有  $|H_0(\omega)| = |S^*(\omega)| = |S(\omega)|$ , 即滤波器和信号的频谱幅值相“匹配”, 故称之为匹配滤波器。

## 4. 广义匹配滤波器设计

当加性噪声  $n(t)$  为有色噪声时, 使输出信噪比最大的滤波器为两个滤波器的级联, 即

$$H_{\text{opt}}(\omega) = W(\omega)H_0(\omega) \quad (4.1.9)$$

式中  $W(\omega)$  为一白化滤波器, 将加性噪声  $n(t)$  滤波为白噪声;  $H_0(\omega)$  由式 (4.1.8) 确定, 是白噪声下的匹配滤波器。由白化滤波器和匹配滤波器级联而成的滤波器称为广义匹配滤波器。

## 5. 匹配滤波器的性质

性质 1 在所有线性滤波器中, 匹配滤波器输出的信噪比最大, 且  $\text{SNR}_{\text{max}} = \frac{E_s}{N_0/2}$ , 它与输入信号的波形以及加性噪声的分布特性无关。

性质 2 匹配滤波器输出信号在  $t = T_0$  时刻的瞬时功率达到最大。

性质 3 匹配滤波器输出信噪比达到最大的时刻  $T_0$  应该选取等于原信号  $s(t)$  的持续时间  $T$ 。

性质 4 匹配滤波器对波形相同而幅值不同的时延信号具有适应性。

性质 5 匹配滤波器对频移信号不具有适应性。

#### 6. 白化滤波器设计

将已知的有色噪声的功率谱进行分解, 有

$$P_n(\omega) = \left[ \alpha \frac{(j\omega + \alpha_1) \cdots (j\omega + \alpha_q)}{(j\omega + \beta_1) \cdots (j\omega + \beta_p)} \right] \left[ \alpha \frac{(-j\omega + \alpha_1) \cdots (-j\omega + \alpha_q)}{(-j\omega + \beta_1) \cdots (-j\omega + \beta_p)} \right] \quad (4.1.10)$$

令  $P_n(\omega)$  在左半平面上的零、极点组成因式  $P_n^+(\omega)$ , 右半平面的零、极点组成因式  $P_n^-(\omega)$ , 并且将  $P_n(\omega)$  位于轴上的零、极点对半分给  $P_n^+(\omega)$  和  $P_n^-(\omega)$ 。于是, 有色噪声功率谱的因式分解为

$$P_n(\omega) = P_n^+(\omega)P_n^-(\omega) \quad (4.1.11)$$

称之为谱分解。

物理可实现的白化滤波器取作

$$W(\omega) = \frac{1}{P_n^+(\omega)} \quad (4.1.12)$$

其输出为标准白噪声 (均值为 0, 方差为 1)。

#### 4.1.2 连续时间的 Wiener 滤波器

考虑对观测数据  $y(t) = s(t) + n(t)$  使用滤波器  $H(\omega)$  实现信号  $s(t)$  的估计:

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (4.1.13)$$

并使均方误差

$$J = E\{[s(t) - \hat{s}(t)]^2\} = E\left\{\left[s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]^2\right\} \quad (4.1.14)$$

最小化。所得到的滤波器称为连续时间的 Wiener 滤波器。

##### 1. 算法 4.1 因果 Wiener 滤波器设计算法 1

已知: 观测数据的功率谱表达式  $P_{yy}(\omega)$ 、信号与观测数据的互功率谱表达式  $P_{sy}(\omega)$ 。

步骤 1 对观测数据的功率谱  $P_{yy}(\omega)$  进行谱分解, 得  $P_{yy}(\omega) = A_{yy}^+(\omega)A_{yy}^-(\omega)$ 。

步骤 2 计算

$$\frac{P_{sy}(\omega)}{A_{yy}^-(\omega)} = B^+(\omega) + B^-(\omega) \quad (4.1.15)$$

步骤 3 因果 Wiener 滤波器的传递函数  $H_{\text{opt}}(\omega)$  为

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{B^+(\omega)}{A_{yy}^+(\omega)} \quad (4.1.16)$$

若令  $z = e^{j\omega}$ , 并将功率谱密度写成  $P_{sy}(z)$  和  $P_{yy}(z)$ , 则上述算法很容易推广为下面的算法。

2. 算法 4.2 因果 Wiener 滤波器设计算法 2

步骤 1 对  $P_{yy}(z)$  进行谱分解得

$$P_{yy}(z) = A_{yy}^+(z)A_{yy}^-(z) \quad (4.1.17)$$

式中  $A_{yy}^+(z)$  的零、极点全部位于单位圆内;  $A_{yy}^-(z)$  的零、极点全部在单位圆外。

步骤 2 计算

$$\frac{P_{sy}(z)}{A_{yy}^-(z)} = B^+(z) + B^-(z) \quad (4.1.18)$$

式中  $B^+(z)$  的零、极点全部在单位圆内, 而  $B^-(z)$  则由所有位于单位圆外的零、极点组成。

步骤 3 因果 Wiener 滤波器的传递函数  $H_{\text{opt}}(z)$  为

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{B^+(z)}{A_{yy}^+(z)} \quad (4.1.19)$$

### 4.1.3 最优滤波理论

问题: 使用滤波器  $w_k, k = 0, 1, \dots$  对离散时间信号  $u(n)$  滤波, 希望使滤波输出  $y(n)$  最佳逼近期望信号  $d(n)$ 。

滤波器设计准则: 使均方误差

$$J = E\{|e(n)|^2\} = E\{|y(n) - d(n)|^2\} \quad (4.1.20)$$

最小化。

1. 正交化原理

$$E\{u(n-k)e_{\text{opt}}^*(n)\} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.21)$$

换句话说,使均方误差最小化的最优线性滤波器的误差信号  $e_{\text{opt}}(n)$  与所有已知数据正交。

### 2. 正交化原理的引理

$$E\{y_{\text{opt}}(n)e_{\text{opt}}^*(n)\} = 0 \quad (4.1.22)$$

即最优滤波器的输出信号与误差信号正交。

### 3. Wiener-Hopf 方程

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{\text{opt},i} R_{u,u}(i-k) = R_{u,d}(-k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.1.23)$$

满足这一方程的滤波器称为 Wiener 滤波器。

### 4. Wiener 滤波器

考虑有限冲激响应 (FIR) Wiener 滤波器的实现。此时, Wiener 滤波器的系数向量可以表示成

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}} = \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{r} \quad (4.1.24)$$

式中

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}} = [w_{\text{opt},0}, w_{\text{opt},1}, \dots, w_{\text{opt},M-1}]^T \quad (4.1.25)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= E\{\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^H(n)\} \\ &= \begin{bmatrix} R_{u,u}(0) & R_{u,u}(1) & \dots & R_{u,u}(M-1) \\ R_{u,u}^*(1) & R_{u,u}(0) & \dots & R_{u,u}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{u,u}^*(M-1) & R_{u,u}^*(M-2) & \dots & R_{u,u}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

$$\boldsymbol{r} = E\{\boldsymbol{u}(n)d^*(n)\} = [R_{u,d}(0), R_{u,d}(-1), \dots, R_{u,d}(-M+1)]^T \quad (4.1.27)$$

#### 4.1.4 Kalman 滤波

过程方程 (状态方程)

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{F}(n+1, n)\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{v}_1(n) \quad (4.1.28)$$

观测方程

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}(n)\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{v}_2(n) \quad (4.1.29)$$

Kalman 滤波问题: 利用观测数据向量  $\boldsymbol{y}(1), \dots, \boldsymbol{y}(n)$ , 求状态向量  $\boldsymbol{x}(n)$  各个分量的最小二乘估计。解决 Kalman 滤波问题的关键是新息过程的应用。

## 1. 新息过程

$\mathbf{y}(n)$  的新息过程定义为

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}_1(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1.30)$$

式中  $\hat{\mathbf{y}}_1(n)$  表示观测数据  $\mathbf{y}(n)$  的一步预测。

新息的性质

性质 1  $n$  时刻的新息  $\boldsymbol{\alpha}(n)$  与所有过去的观测数据  $\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n-1)$  正交, 即

$$E\{\boldsymbol{\alpha}(n)\mathbf{y}^H(k)\} = \mathbf{O}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (4.1.31)$$

式中  $\mathbf{O}$  表示零矩阵。

性质 2 新息过程由彼此正交的随机向量序列  $\{\boldsymbol{\alpha}(n)\}$  组成, 即有

$$E\{\boldsymbol{\alpha}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(k)\} = \mathbf{O}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (4.1.32)$$

性质 3 观测数据向量序列  $\{\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n)\}$  与其新息过程向量序列  $\{\boldsymbol{\alpha}(1), \dots, \boldsymbol{\alpha}(n)\}$  是一一对应的, 即

$$\{\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n)\} \iff \{\boldsymbol{\alpha}(1), \dots, \boldsymbol{\alpha}(n)\} \quad (4.1.33)$$

## 2. 算法 4.3 Kalman 自适应滤波算法

初始条件:

$$\hat{\mathbf{x}}_1(1) = E\{\mathbf{x}(1)\}$$

$$\mathbf{K}(1, 0) = E\{[\mathbf{x}(1) - \bar{\mathbf{x}}(1)][\mathbf{x}(1) - \bar{\mathbf{x}}(1)]^H\}, \quad \text{其中 } \bar{\mathbf{x}}(1) = E\{\mathbf{x}(1)\}$$

输入观测向量过程:

$$\text{观测向量序列} = \{\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n)\}$$

已知参数:

状态转移矩阵  $\mathbf{F}(n+1, n)$

观测矩阵  $\mathbf{C}(n)$

过程噪声向量的相关矩阵  $\mathbf{Q}_1(n)$

观测噪声向量的相关矩阵  $\mathbf{Q}_2(n)$

计算:  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathbf{G}(n) = \mathbf{F}(n+1, n)\mathbf{K}(n, n-1)\mathbf{C}^H(n) \left[ \mathbf{C}(n)\mathbf{K}(n, n-1)\mathbf{C}^H(n) + \mathbf{Q}_2(n) \right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \mathbf{y}(n) - \mathbf{C}(n)\hat{\mathbf{x}}_1(n)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1(n+1) = \mathbf{F}(n+1, n)\hat{\mathbf{x}}_1(n) + \mathbf{G}(n)\boldsymbol{\alpha}(n)$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{K}(n, n-1) - \mathbf{F}^{-1}(n+1, n)\mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n)\mathbf{K}(n, n-1)$$

$$\mathbf{K}(n+1, n) = \mathbf{F}(n+1, n)\mathbf{P}(n)\mathbf{F}^H(n+1, n) + \mathbf{Q}_1(n)$$

应用 Kalman 滤波算法的关键：针对所研究的问题，建立相应的状态方程和观测方程。

#### 4.1.5 LMS自适应算法

最陡下降法 (也称梯度算法) 的统一形式为

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) - \frac{1}{2}\mu(n)\nabla J(n-1) \quad (4.1.34)$$

梯度 (或真实梯度) 向量

$$\nabla J(n) = 2\mathbf{E}\{\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\}\mathbf{w}(n) - 2\mathbf{E}\{\mathbf{u}(n)d^*(n)\} \quad (4.1.35)$$

含数学期望运算。

##### 1. LMS 算法及其变型

数学期望被瞬时值代替的梯度向量称为瞬时梯度向量，即

$$\hat{\nabla} J(n) = 2\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\mathbf{w}(n) - 2\mathbf{u}(n)d^*(n) \quad (4.1.36)$$

瞬时梯度算法为

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mu(n)\mathbf{u}(n)[d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n)]^* \quad (4.1.37)$$

#### 算法 4.4 (基本) LMS 自适应算法

步骤 1 初始化:  $\mathbf{w}(0) = 0$ ;

步骤 2 更新:  $n = 1, 2, \dots$

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n)$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mu(n)\mathbf{u}(n)e^*(n)$$

当期望信号未知时，步骤 2 中的  $d(n)$  可直接用滤波器的实际输出  $y(n)$  代替。

下面是基本 LMS 算法的几种变型。

归一化 LMS 算法: 取  $\mu(n) = \frac{\alpha}{\beta + \mathbf{u}^H(n)\mathbf{u}(n)}$ , 其中  $\alpha \in (0, 2)$ ,  $\beta > 0$ 。

功率归一化 LMS 算法: 取  $\mu(n) = \frac{\alpha}{\sigma_u^2(n)}$ , 其中  $\sigma_u^2$  表示  $u(n)$  的方差, 可由  $\sigma_u^2(n) = \lambda\sigma_u^2(n-1) + e^2(n)$  递推计算, 这里  $\lambda \in (0, 1]$  为遗忘因子, 由  $0 < \alpha < \frac{2}{M}$  确定, 而  $M$  是滤波器的阶数。

## 算法 4.5 解相关 LMS 算法

步骤 1 初始化:  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ ;步骤 2 更新:  $n = 1, 2, \dots$ 

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n)$$

$$a(n) = \frac{\mathbf{u}^H(n)\mathbf{u}(n-1)}{\mathbf{u}^H(n-1)\mathbf{u}(n-1)}$$

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{u}(n) - a(n)\mathbf{u}(n-1)$$

$$\mu(n) = \frac{\rho e(n)}{\mathbf{u}^H(n)\mathbf{v}(n)}$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mu(n)\mathbf{v}(n)$$

上述算法中, 参数  $\rho$  称为修整因子 (trimming factor).

## 算法 4.6 滤波型 LMS 算法

步骤 1 初始化:  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ ;步骤 2 更新:  $n = 1, 2, \dots$ 

给定一前向预测器  $\mathbf{a}(n)$  的估计

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n)$$

$$\mathbf{e}(n) = [e(n), e(n-1), \dots, e(n-M+1)]^T$$

$$e^f(n) = \mathbf{u}(n) + \mathbf{a}^T(n)\mathbf{u}(n-1)$$

$$\mathbf{e}^f(n) = [e^f(n), e^f(n-1), \dots, e^f(n-M+1)]^T$$

$$\tilde{e}(n) = e(n) + \mathbf{a}^H(n)\mathbf{e}(n) \quad (\text{滤波})$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mu\mathbf{e}^f(n)\tilde{e}(n)$$

## 算法 4.7 变换域 LMS 算法

步骤 1 初始化:  $\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}$ ;步骤 2 给定一酉变换矩阵  $\mathbf{S}$ 更新:  $n = 1, 2, \dots$ 

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{S}\mathbf{u}(n)$$

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n-1)\mathbf{x}(n)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = \hat{\mathbf{w}}(n-1) + \mu(n)\mathbf{x}(n)e(n)$$

## 2. 学习速率参数 $\mu$ 的取值范围

均值收敛：若滤波器权向量的估计值  $\hat{\boldsymbol{w}}(n)$  收敛为最优 Wiener 滤波器，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{\hat{\boldsymbol{w}}(n)\} = \boldsymbol{w}_{\text{opt}} \quad (4.1.38)$$

则称 LMS 算法是均值收敛的。LMS 算法均值收敛的条件是：学习速率参数  $\mu(n)$  满足不等式

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (4.1.39)$$

式中  $\lambda_{\max}$  是 LMS 滤波器输入向量  $\boldsymbol{u}$  的自相关矩阵  $\boldsymbol{R} = \mathbf{E}\{\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^H(n)\}$  的最大特征值。

均方收敛：若当迭代次数  $n$  趋于无穷大时，误差信号  $\epsilon(n) = d(n) - \boldsymbol{w}^H(n)\boldsymbol{u}(n)$  的均方值收敛为一常数，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left\{\|\hat{\boldsymbol{w}}(n) - \boldsymbol{w}_{\text{opt}}(n)\|^2\right\} = c \text{ (常数)} \quad (4.1.40)$$

则称 LMS 算法是均方收敛的。LMS 算法均方收敛的条件是：学习速率参数  $\mu$  满足不等式

$$0 < \mu < \frac{2}{\text{tr}[\boldsymbol{R}]} \quad \text{或} \quad 0 < \mu < \frac{2}{\text{总的输入能量}} \quad (4.1.41)$$

均值收敛和均方收敛条件可以合并写作

$$0 < \mu < \frac{2}{\text{tr}[\boldsymbol{R}]} \leq \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (4.1.42)$$

这表明，若 LMS 算法是均方收敛的，则它必定也是均值收敛的。

### 4.1.6 RLS 自适应算法

代价函数取指数加权误差平方和

$$J(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} |\epsilon(i)|^2 = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} |d(i) - \boldsymbol{w}^H(n)\boldsymbol{u}(i)|^2 \quad (4.1.43)$$

式中，加权因子  $0 < \lambda < 1$  为遗忘因子。使该代价函数最小化的解为 Wiener 滤波器，即

$$\boldsymbol{w}(n) = \boldsymbol{R}^{-1}(n)\boldsymbol{r}(n) \quad (4.1.44)$$

#### 算法 4.8 RLS 直接算法

步骤 1 初始化： $\boldsymbol{w}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{P}(0) = \delta^{-1}\boldsymbol{I}$ ，其中  $\delta$  是一个很小的值。

步骤 2 更新:  $n = 1, 2, \dots$

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n)$$

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)}{\lambda + \mathbf{u}^H(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)}$$

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{u}^H(n)\mathbf{P}(n-1)]$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)e^*(n)$$

下面是 RLS 滤波算法与 Kalman 滤波算法之间的比较。

表 4.1.1 Kalman 滤波算法与 RLS 滤波算法之间的变量对应关系<sup>[16]</sup>

Kalman 算法		RLS 算法	
参数名称	变量	变量	参数名称
初始状态向量	$\mathbf{x}(0)$	$\mathbf{w}_0$	抽头权向量
状态向量	$\mathbf{x}(n)$	$\lambda^{-n/2}\mathbf{w}_0$	指数加权的抽头权向量
参考(观测)信号	$y(n)$	$\lambda^{-n/2}d^*(n)$	期望响应
观测噪声	$v(n)$	$\lambda^{-n/2}e_0^*(n)$	测量误差
一步预测的状态向量	$\hat{\mathbf{x}}(n+1 y_1, \dots, y_n)$	$\lambda^{-n/2}\hat{\mathbf{w}}(n)$	抽头权向量的估计
状态预测误差的相关矩阵	$\mathbf{K}(n)$	$\lambda^{-1}\mathbf{P}(n)$	输入向量相关矩阵的逆矩阵
Kalman 增益	$\mathbf{g}(n)$	$\lambda^{-1/2}\mathbf{k}(n)$	增益向量
新息	$\alpha(n)$	$\lambda^{-n/2}\xi^*(n)$	先验估计误差
初始条件	$\hat{\mathbf{x}}(1) = \mathbf{0}$ $\mathbf{K}(0)$	$\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}$ $\delta^{-1}\mathbf{P}(0)$	初始条件

### 4.1.7 LMS 自适应格型滤波器

下面是 LMS 自适应格型滤波器的结构图:

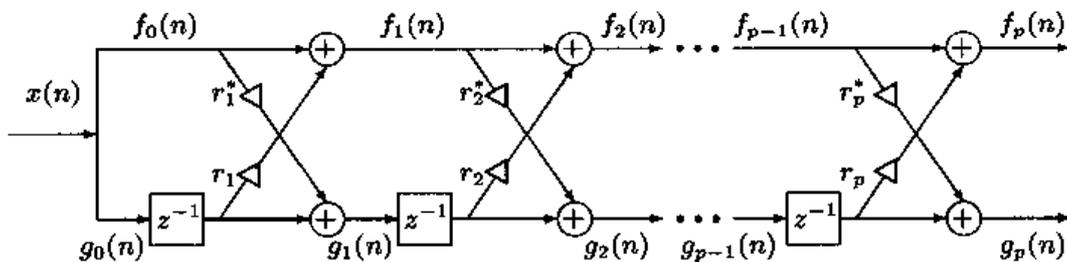


图 4.1.1 LMS 自适应格型滤波器

前向和后向残差递推关系:

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + r_m g_{m-1}(n-1) \quad (4.1.45)$$

$$g_m(n) = r_m^* f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \quad (4.1.46)$$

初始值为  $f_0(n) = g_0(n) = x(n)$ .

下面三种设计准则等价:

(1) 使前向滤波器  $A_m(z) = \sum_{i=0}^m a_m(i)z^{-i}$  的残差能量  $F_m = E\{|f_m(n)|^2\}$  为最小;

(2) 使后向滤波器  $B_m(z) = \sum_{i=0}^m a_m^*(m-i)z^{-i}$  的残差能量  $G_m = E\{|g_m(n)|^2\}$  为最小;

(3) 使前、后向滤波器的平均残差能量  $\frac{1}{2}(F_m + G_m)$  为最小.

算法 4.9 LMS 格型自适应滤波算法

初始化:  $f_0(n) = g_0(n) = x(n)$ ;  $P_0(n) = |x(n)|^2$ ;  $r_1(n)$  接近于 1, 如  $r_1(n) = 0.998$ . 取  $w(n) = \lambda^n$ ,  $|\lambda| < 1$ .

步骤 1 求中间系数

$$C_{m-1}(n) = \lambda C_{m-1}(n-1) + f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1) \quad (4.1.47)$$

$$D_{m-1}(n) = \lambda D_{m-1}(n-1) + [\beta |f_{m-1}(n)|^2 + (1-\beta)|g_{m-1}(n-1)|^2] \quad (4.1.48)$$

步骤 2 计算反射系数

$$r_m(n) = -C_{m-1}(n)/D_{m-1}(n) \quad (4.1.49)$$

步骤 3 计算前、后向残差

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + r_m(n)g_{m-1}(n-1) \quad (4.1.50)$$

$$g_m(n) = r_m^*(n)f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \quad (4.1.51)$$

步骤 4 利用 Burg 递推计算

$$a_m^{(m)}(n) = r_m(n) \quad (4.1.52)$$

$$a_i^{(m)}(n) = a_i^{(m-1)}(n) + r_m(n)a_{m-i}^{*(m-1)}(n) \quad (4.1.53)$$

$$P_m = (1 - |r_m|^2)P_{m-1} \quad (4.1.54)$$

式中  $a_i^{(m)}(n)$  表示  $m$  阶前向滤波器第  $i$  个系数在  $n$  时刻的值;  $P_m$  为  $m$  阶格型滤波器的残差能量。

#### 4.1.8 自适应滤波器的算子理论

##### 1. 滤波器算子的三要素

将线性滤波器当作一算子, 则滤波器算子应该具备“三要素”:

(1) 为了保证信号通过滤波器后不致发生“畸变”, 滤波器算子  $P$  必须是一线性算子。

(2) 当滤波器输出  $\hat{s}(n)$  再次通过滤波器时, 信号估计  $\hat{s}(n)$  不应发生任何变化。这要求滤波器算子必须是一个幂等算子:

$$P^2 \stackrel{\text{def}}{=} PP = P \quad (4.1.55)$$

(3) 根据正交性原理, 当滤波器工作在最优条件时, 估计误差  $x - Px$  应该与期望响应的估计值  $Px$  正交, 即

$$[x - Px] \perp Px \quad (4.1.56)$$

其充分必要条件是

$$P^H = P \quad (4.1.57)$$

即滤波器算子应具有共轭对称性 (其共轭转置仍等于滤波器算子本身)。

可用作线性滤波器算子的两个典型例子是投影矩阵和正交投影矩阵。

##### 2. 投影矩阵

定理: 若  $M \times N$  (其中  $M > N$ ) 矩阵  $U$  满列秩, 则投影矩阵  $P_U$  由

$$P_U = U(U, U)^{-1}U^H \quad (4.1.58)$$

给出。

性质 1 幂等性:

$$P_U P_U = P_U \quad (4.1.59)$$

性质 2 对称性:

$$P_U^H = P_U \quad (4.1.60)$$

##### 3. 正交投影矩阵

$$P_U^\perp = I - P_U = I - U(U, U)^{-1}U^H \quad (4.1.61)$$

性质 1 对称性:

$$[P_U^\perp]^H = P_U^\perp \quad (4.1.62)$$

性质 2 幂等性:

$$P_U^\perp P_U^\perp = P_U^\perp \quad (4.1.63)$$

性质 3 与投影矩阵的正交性:

$$P_U^\perp P_U = O \text{ 或 } P_U P_U^\perp = O \quad (4.1.64)$$

式中  $O$  是元素全部等于零的矩阵。

#### 4. 投影矩阵和正交投影矩阵的更新

$$P_{U,u} = P_U + P_U^\perp u \langle P_U^\perp u, P_U^\perp u \rangle^{-1} u^H P_U^\perp \quad (4.1.65)$$

$$P_{U,u}^\perp = P_U^\perp - P_U^\perp u \langle P_U^\perp u, P_U^\perp u \rangle^{-1} u^H P_U^\perp \quad (4.1.66)$$

#### 5. 向量的更新

$$P_{U,u} y = P_U y + P_U^\perp u \langle P_U^\perp u, P_U^\perp u \rangle^{-1} \langle u, P_U^\perp y \rangle \quad (4.1.67)$$

$$P_{U,u}^\perp y = P_U^\perp y - P_U^\perp u \langle P_U^\perp u, P_U^\perp u \rangle^{-1} \langle u, P_U^\perp y \rangle \quad (4.1.68)$$

#### 6. 标量的更新

$$\langle z, P_{U,u} y \rangle = \langle z, P_U y \rangle + \langle z, P_U^\perp u \rangle \langle P_U^\perp u, P_U^\perp u \rangle^{-1} \langle u, P_U^\perp y \rangle \quad (4.1.69)$$

$$\langle z, P_{U,u}^\perp y \rangle = \langle z, P_U^\perp y \rangle - \langle z, P_U^\perp u \rangle \langle P_U^\perp u, P_U^\perp u \rangle^{-1} \langle u, P_U^\perp y \rangle \quad (4.1.70)$$

### 4.1.9 LS 自适应格型滤波器

下面是 LS 自适应格型滤波器的结构图:

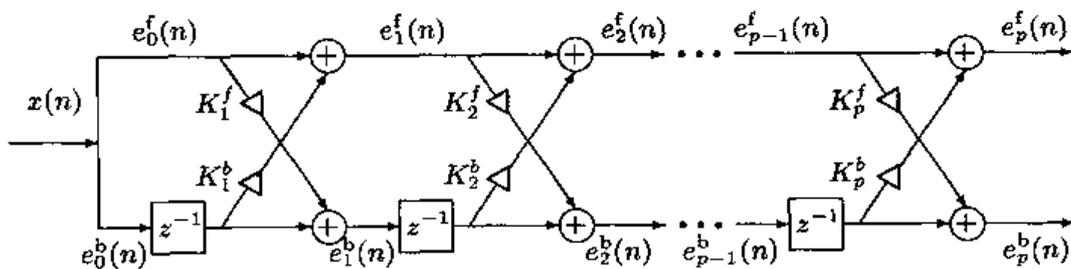


图 4.1.2 LS 自适应格型滤波器

前、后向预测误差的关系方程:

$$e_{m+1}^f(n) = e_m^f(n) - K_{m+1}^b(n)e_m^b(n-1) \quad (4.1.71)$$

$$e_{m+1}^b(n) = -K_{m+1}^f(n)e_m^f(n) + e_m^b(n-1) \quad (4.1.72)$$

算法 4.10 LS 格型自适应滤波算法

初始化:

$$e_m^b(0) = e_m^f(0) = \Delta_m(0) = 0$$

$$\gamma_m(0) = 1$$

$$\epsilon_m^f(0) = \epsilon_m^b(0) = \delta$$

对  $n = 1, 2, \dots$ , 计算

$$e_0^b(n) = e_0^f(n) = x(n)$$

$$\epsilon_0^b(n) = \epsilon_0^f(n) = e_0^f(n-1) + x^2(n)$$

$$\gamma_0(n) = 1$$

对  $m = 0, 1, \dots, M-1$  计算

$$\Delta_{m+1}(n) = \Delta_{m+1}(n-1) + \frac{\epsilon_m^f(n)\epsilon_m^b(n-1)}{\gamma_m(n-1)}$$

$$e_{m+1}^f(n) = e_m^f(n) - \frac{\Delta_{m+1}(n-1)e_m^b(n-1)}{\epsilon_m^b(n-1)}$$

$$e_{m+1}^b(n) = e_m^b(n-1) - \frac{\Delta_{m+1}(n-1)e_m^f(n)}{\epsilon_m^f(n)}$$

$$\epsilon_{m+1}^f(n) = \epsilon_m^f(n) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\epsilon_m^b(n-1)}$$

$$\epsilon_{m+1}^b(n) = \epsilon_m^b(n-1) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\epsilon_m^f(n)}$$

$$\gamma_{m+1}(n-1) = \gamma_m(n-1) - \frac{[e_m^b(n-1)]^2}{\epsilon_m^b(n-1)}$$

#### 4.1.10 自适应谱线增强器与陷波器

##### 1. 谱线增强器

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \omega = \omega_1, \dots, \omega_p \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.1.73)$$

2. 陷波器

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \omega = \omega_1, \dots, \omega_p \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.1.74)$$

3. 格型 IIR 陷波器

结构图:

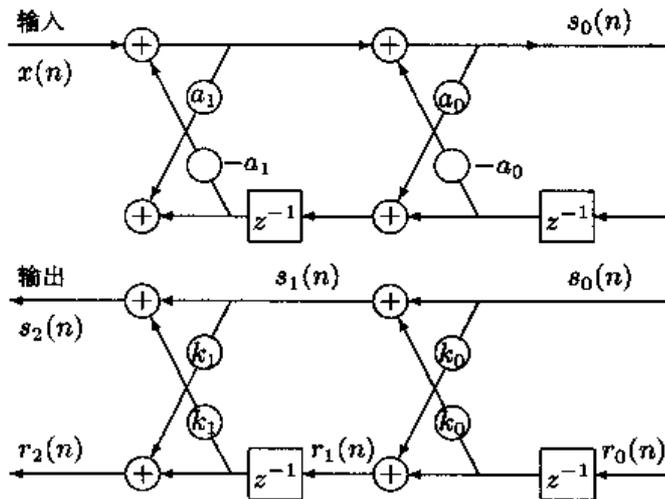


图 4.1.3 格型 IIR 滤波器

4. 陷波器权系数

$$a_1 \approx \alpha k_1 \quad \text{和} \quad a_0 \approx k_0 \quad (4.1.75)$$

式中  $\alpha$  接近于 1, 如  $\alpha = 0.995$ .

$k_m, m = 0, 1$  的更新

$$k_m(n) = \frac{C_m(n)}{D_m(n)} \quad (4.1.76)$$

$$C_m(n) = \lambda C_m(n-1) + s_m(n)r_m(n-1) \quad (4.1.77)$$

$$D_m(n) = \lambda D_m(n-1) + \frac{1}{2} [s_m^2(n) + r_m^2(n)] \quad (4.1.78)$$

式中  $s_0(n) = r_0(n)$ , 并且

$$s_0(n) + a_0(1 + a_1)s_0(n-1) + a_1s_0(n-2) = x(n) \quad (4.1.79)$$

$$s_1(n) = s_0(n) + k_0s_0(n-1) \quad (4.1.80)$$

$$r_1(n) = k_0s_0(n) + s_0(n-1) \quad (4.1.81)$$

#### 4.1.11 广义旁瓣对消器

考查使用  $M$  个阵元接收  $L$  个信号。

已知：约束矩阵  $C = [c_1^T, \dots, c_L^T]^T$  (例如，在阵列信号处理中， $c_i = a(\phi_i)$  是第  $i$  个信号的方向向量)。

问题：设计窄带波束形成器  $w$  抽取期望信号。

只接收第  $k$  个信号 (相当于阵列的主瓣)，并拒绝其他所有信号 (阵列的旁瓣为零) 的波束形成器称为旁瓣对消器，定义为

$$C^H w = g \quad (4.1.82)$$

其中  $g$  是一个第  $k$  个元素为 1，其他元素全部为零的向量。

令  $C_a$  是约束矩阵  $C$  的正交补，前者可以根据后者和 Gram-Schmidt 标准正交化构造。

广义旁瓣对消器可以用以下形式自适应实现：

$$w = w_0 - C_a w_a \quad (\text{广义旁瓣对消器}) \quad (4.1.83)$$

式中

$$w_0 \stackrel{\text{def}}{=} C(C^H C)^{-1} g \quad (4.1.84)$$

为固定的滤波器，而  $w_a$  是自适应滤波器，其系数需要自适应调整。

式 (4.1.83) 的分解为正交分解，因为  $\langle w_0, C_a w_a \rangle = 0$ 。

## 4.2 习 题

## 题 4.1 谐波信号

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f_c = \frac{1}{T}$$

观测样本为

$$y(t) = s(t) + w(t)$$

其中  $w(t)$  是一高斯白噪声, 其均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ . 求匹配滤波器在  $t = T$  时的输出以及它的均值和方差.

题 4.2 假定发射机轮流发射信号  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$ , 其中

$$s_1(t) = A \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f_c = \frac{1}{T}$$

$$s_2(t) = A \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T$$

忽略信号传输过程中的衰减, 且接收机端的观测噪声为白噪声  $w(t)$ , 其均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ . 现在接收端设计一匹配滤波器抽取信号  $s_1(t)$ , 求该匹配滤波器在  $t = T$  时输出的数学期望.

## 题 4.3 令信号为

$$s(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

并且加性噪声  $n(t)$  是一高斯白噪声, 其均值为 0, 方差为 1. 求匹配滤波器的冲激响应  $h_0(t)$ .

题 4.4 已知信号  $s(t)$  的自相关函数

$$R_{ss}(\tau) = A \frac{\sin^2(\alpha\tau)}{\tau^2}$$

加性噪声的自相关函数

$$R_{vv}(\tau) = N\delta(\tau)$$

并且信号与噪声不相关, 即  $R_{sv}(\tau) = E\{s(t)v(t-\tau)\} = 0, \forall \tau$ . 分别求出用观测数据  $x(t) = s(t) + v(t)$  估计  $s(t)$  的非因果 Wiener 滤波器  $H(\omega)$ .

**题 4.5** 令信号  $s(t)$  和噪声  $n(t)$  分别是零均值的平稳随机过程, 并且

$$R_{ss}(\tau) = E\{s(t)s(t-\tau)\} = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

$$R_{nn}(\tau) = E\{n(t)n(t-\tau)\} = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

同时, 信号与噪声不相关, 即

$$E\{s(t)n(t-\tau)\} = 0, \quad \forall \tau$$

试求因果 Wiener 滤波器的传递函数表达式。

**题 4.6** 令信号  $s(t)$  和  $n(t)$  均为零均值的平稳随机过程, 且  $y(t) = s(t) + n(t)$ , 已知

$$P_{ss}(\omega) = \frac{N_0}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$P_{nn}(\omega) = N \quad \text{和} \quad P_{sn}(\omega) = 0$$

式中  $\alpha > 0$ . 求因果 Wiener 滤波器的传递函数。

**题 4.7** Wiener 滤波器设计<sup>[32]</sup>.

(1) 观测数据

$$x(n) = d(n) + v(n)$$

式中, 期望信号的相关函数  $R_d(k) = 0.8^{|k|}$ , 并且  $v(n)$  是一个均值为 0, 方差为 1 的白噪声。

(2) 期望信号是一个 AR(1) 过程:

$$d(n) = 0.8d(n-1) + w(n)$$

式中  $w(n)$  是一白噪声, 其均值为 0, 方差为  $\sigma_w^2 = 0.36$ . 期望信号  $d(n)$  与噪声  $v(n)$  不相关, 噪声  $v(n)$  与  $w(n)$  不相关, 并且观测数据  $x(n)$  为实信号。

用 Wiener 滤波器对  $x(n)$  进行滤波, 滤波器输出作为期望信号  $d(n)$  的估计  $\hat{d}(n)$ , 求  $\hat{d}(n)$  的表达式。

**题 4.8** 离散时间信号  $s(n)$  是一个一阶的 AR 过程, 其相关函数  $R_s(k) = \alpha^{|k|}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . 令观测数据为  $x(n) = s(n) + v(n)$ , 其中  $s(n)$  和  $v(n)$  不相关, 且  $v(n)$  是一个均值为 0, 方差为  $\sigma_v^2$  的白噪声. 设计 Wiener 滤波器  $H(z)$ .

**题 4.9** 令  $H(e^{j\omega})$  是一无限冲激响应 (IIR) Wiener 滤波器, 其冲激响应系数为  $h(i)$ ,  $s(n)$  为期望信号,  $v(n)$  为加性噪声, 它与期望信号不相关。求 Wiener 滤波器的最小均方误差  $J_{\min}$ 。

**题 4.10** 假定对观测数据  $y(t) = x(t) + n(t)$  进行直接滤波的滤波器具有传递函数

$$a(t, u) = \frac{m(1+u)^{m-1}}{(1+t)^m}, \quad 0 \leq u \leq t, \quad m > 0$$

求  $y(t)$  的新息过程, 并设计一作用于新息的滤波器  $b(t, u)$ 。

**题 4.11** 假设一观测信号  $y(t) = s(t) + n(t)$  的功率谱为

$$P_{yy}(\omega) = \frac{\omega^2 + 25}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}$$

求新息过程  $w(t)$  和信号  $s(t)$  的线性均方估计  $\hat{s}(t)$  的表达式。

**题 4.12** 令  $x(t)$  是一个时不变的标量随机变量, 它在加性高斯白噪声  $v(t)$  中被观测, 即  $y(t) = x(t) + v(t)$  为观测数据, 其中  $v(t)$  的均值为 0、方差为  $\sigma_v^2$ 。若用 Kalman 滤波器自适应估计  $x(t)$ , 并令  $K(1, 0) = p_0$ , 试设计 Kalman 滤波器:

- (1) 构造离散时间的状态空间方程;
- (2) 求出状态变量  $x(n)$  的更新公式。

**题 4.13** 考虑题 4.12 的两种特殊情况:

- (1) 加性白噪声  $v(t)$  的方差无穷大;
- (2) 状态变量  $x(t)$  的方差无穷大。

讨论在这两种特殊情况下状态变量估计  $\hat{x}(k)$  的状况。

**题 4.14** AR(1) 过程的 Kalman 滤波估计。状态变量服从 AR(1) 模型:

$$x(n) = 0.8x(n-1) + w(n)$$

式中  $w(n)$  为白噪声, 其均值为 0, 方差  $\sigma_w^2 = 0.36$ 。观测方程为

$$y(n) = x(n) + v(n)$$

其中  $v(n)$  是一个与  $w(n)$  不相关的白噪声, 其均值为 0, 方差  $\sigma_v^2 = 1$ 。用 Kalman 滤波器估计状态变量, 求  $\hat{x}(n)$  的具体表达式。

**题 4.15** 一时变系统的状态转移方程和观测方程分别为

$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_1(n)$$

和

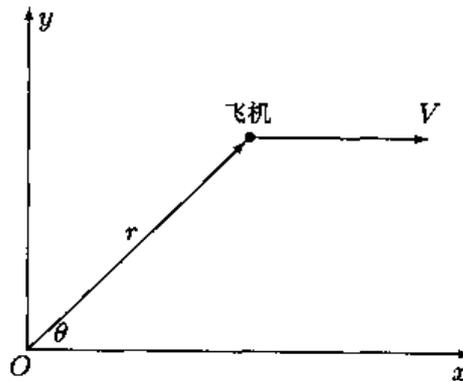
$$y(n) = x(n) + v_2(n)$$

式中

$$\begin{aligned} E\{v_1(n)\} &= 0 \\ E\{v_1(n)v_1^T(k)\} &= \begin{cases} \sigma_1^2 I, & n = k \\ O, & n \neq k \end{cases} \\ E\{v_2(n)v_2^T(k)\} &= \begin{cases} \sigma_2^2 I, & n = k \\ O, & n \neq k \end{cases} \\ E\{v_1(n)v_2^T(k)\} &= O, \quad \forall n, k \\ E\{x(1)x^T(1)\} &= I \end{aligned}$$

式中  $O$  和  $I$  分别为零矩阵和单位矩阵。求  $x(n)$  的更新公式。

**题 4.16** 图题 4.16 是二维雷达跟踪的示意图 [23]。



图题 4.16 雷达跟踪的几何示意图

图中，目标飞机以恒速度  $V$  在  $x$  方向上飞行，雷达位于原点  $O$ ，飞机到雷达的距离为  $r$ ，方位角为  $\theta$ 。为了使雷达跟踪飞机，现在拟使用 Kalman 滤波器对飞机的距离  $r$ 、飞机在雷达视线上的速度  $\dot{r}$ 、方位角  $\theta$  和角速度  $\dot{\theta}$  进行自适应估计。试针对二维雷达跟踪问题，构造离散时间的状态空间方程。

**题 4.17** 一时变的实 ARMA 过程由差分方程

$$y(n) + \sum_{i=1}^p a_i(n)y(n-i) = \sum_{i=1}^q a_{p+i}v(n-i) + v(n)$$

描述，式中  $a_1(n), \dots, a_p(n), a_{p+1}(n), \dots, a_{p+q}(n)$  为 ARMA 模型参数，过程  $v(n)$  为

输入, 而  $y(n)$  为输出。假定输入过程  $v(n)$  是一高斯白噪声, 方差为  $\sigma_v^2$ 。ARMA 模型参数服从一随机扰动模型:

$$a_k(n+1) = a_k(n) + w_k(n), \quad k = 1, 2, \dots, p, p+1, \dots, p+q$$

式中  $w_k(n)$  是一零均值的高斯白噪声过程, 并且与  $w_j(n), j \neq k$  相互独立, 也与  $v(n)$  独立。假定  $w_k(n)$  (其中  $k = 1, 2, \dots, p+q$ ) 具有相同方差  $\sigma_w^2$ 。定义  $(p+q) \times 1$  维状态向量

$$\mathbf{x}(n) = [a_1(n), \dots, a_p(n), a_{p+1}(n), \dots, a_{p+q}(n)]^T$$

并定义测量矩阵 (这里实质为行向量)

$$\mathbf{c}(n) = [-y(n-1), \dots, -y(n-p), v(n-1), \dots, v(n-q)]$$

试根据以上条件, 求下列问题的解:

- (1) 建立时变 ARMA 过程的状态空间方程;
- (2) 求更新状态向量  $\mathbf{x}(n+1)$  的 Kalman 自适应滤波算法;
- (3) 如何设定初始值?

**题 4.18** 在无线通信中, 无线信道常用冲激响应已知 FIR 滤波器作为模型。若信道输出即接收机接收的信号  $y(n)$  由

$$y(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n) + w(n)$$

给出, 式中  $\mathbf{h}$  是一  $M \times 1$  向量, 表示信道冲激响应;  $\mathbf{x}(n)$  为一  $M \times 1$  向量, 表示信道输入的当前值和  $M-1$  个以前的发射值; 而  $w(n)$  为高斯白噪声, 均值为零、方差为  $\sigma_w^2$ 。在时刻  $n$ , 信道输入  $u(n)$  由二进制编码  $\{-1, +1\}$  组成, 与  $w(n)$  统计独立。因此, 状态方程可写成<sup>[22]</sup>

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{e}_1 v(n)$$

式中  $v(n)$  是均值为零、方差为  $\sigma_v^2$  的高斯白噪声, 它与  $w(n)$  独立; 矩阵  $\mathbf{A}$  是一个  $M \times M$  矩阵, 其元素

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j + 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

向量  $\mathbf{e}_1$  是一个  $M \times 1$  向量, 其元素定义为

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在已知信道模型和含噪声的观测值  $y(n)$  的情况下, 使用 Kalman 滤波构造一均衡器, 它能够在某个延迟时间  $(n+D)$  给出信道输入  $u(n)$  的一估计值, 其中  $0 \leq D \leq M-1$ . 证明: 所构造的均衡器是一个无限冲激响应滤波器, 其系数由两组不同的参数决定: (1)  $M \times 1$  信道冲激响应向量, (2) Kalman 增益向量 (它是一个  $M$  维的列向量).

**题 4.19** 考虑时变的代价函数

$$J(n) = |e(n)|^2 + \alpha \|w(n)\|^2 \quad (\text{题 4.19.1})$$

式中  $w(n)$  为一横向滤波器的抽头权向量,  $\alpha$  为常数, 而  $e(n)$  代表估计误差, 定义为

$$e(n) = d(n) - w^H(n)u(n)$$

其中  $d(n)$  为期望信号;  $u(n)$  为滤波器抽头输入向量. 式 (题 4.19.1) 定义的代价函数不仅考虑了估计误差, 而且还考虑了抽头权向量的误差泄漏. 现在, 若代价函数  $J(n)$  相对于权向量  $w(n)$  最小化, 则得到的自适应滤波算法称为泄漏 LMS 算法 (leaky LMS algorithm)<sup>[16]</sup>.

(1) 证明泄漏 LMS 算法中的抽头权向量的更新公式为

$$\hat{w}(n+1) = (1 - \mu\alpha)\hat{w}(n) + \mu u(n)e^*(n) \quad (\text{题 4.19.2})$$

(2) 应用独立性理论证明, 当泄漏 LMS 算法均值收敛时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{w}(n)\} = (R + \alpha I)^{-1}p \quad (\text{题 4.19.3})$$

式中  $R$  是抽头输入的相关矩阵, 而  $p$  是输入与期望响应之间的互相关向量.

**题 4.20** 考虑一码分多址 (CDMA) 系统, 它共有  $K$  个用户. 假定用户 1 为期望用户, 其特征波形向量  $s_1$  为已知, 并满足单位能量条件  $\langle s_1, s_1 \rangle = s_1^T s_1 = 1$ . 现有一接收机的观测数据向量为  $y(n)$ , 它包含了  $K$  个用户信号的线性混合. 为了检测期望用户的信号, 我们希望设计一多用户检测器  $c_1$ , 使检测器的输出能量最小化. 令多用户检测器服从约束条件  $c_1 = s_1 + U_i w$ , 其中  $U_i$  称为干扰子空间, 意即它的列张成干扰子空间.

(1) 求线性检测器  $c_1$  的 LMS 自适应算法.

(2) 如何计算干扰子空间  $U_i$ ?

**题 4.21** 证明下列关系为真:

$$X_{1,k}(n) = \begin{bmatrix} 0_k^T \\ X_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix} \quad (\text{题 4.21.1})$$

和

$$P_{1,k}(n) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^T \\ \mathbf{0}_{k-1} & P_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix} \quad (\text{题 4.21.2})$$

式中  $\mathbf{0}_k$  为  $k \times 1$  维零向量。

**题 4.22** 如果  $j$  阶最小二乘后向预测误差向量由

$$P_{0,j-1}^\perp(n)z^{-j}\mathbf{x}(n) = \mathbf{e}_j^b(n) \quad (\text{题 4.22.1})$$

给出, 证明

$$P_{1,j}^\perp(n)z^{-j-1}\mathbf{x}(n) = z^{-1}\mathbf{e}_j^b(n) \quad (\text{题 4.22.2})$$

**题 4.23** 给定一时间信号  $\mathbf{v}(n) = [v(1), v(2), v(3), \dots, v(n)]^T = [4, 2, 4, \dots]^T$ . 计算

- (1) 数据向量  $\mathbf{v}(2)$  和  $\mathbf{v}(3)$ .
- (2) 向量  $z^{-1}\mathbf{v}(2)$  和  $z^{-2}\mathbf{v}(2)$ .
- (3) 向量  $z^{-1}\mathbf{v}(3)$  和  $z^{-2}\mathbf{v}(3)$ .

若令  $\mathbf{u}(n) = z^{-1}\mathbf{v}(n)$ , 再计算

- (4) 投影矩阵  $P_u(2)$  和  $P_u(3)$ .
- (5) 利用  $\mathbf{u}(n)$  求  $\mathbf{v}(n)$  的最小二乘预测. 这一预测称为  $\mathbf{v}(n)$  的一步前向预测.
- (6) 前向预测误差向量  $\mathbf{e}_1^f(2)$  和  $\mathbf{e}_1^f(3)$ .

**题 4.24** 已知前向和后向预测残差分别为

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^f(n) &= \langle \mathbf{x}(n), P_{1,m}^\perp(n)\mathbf{x}(n) \rangle \\ \varepsilon_m^b(n) &= \langle z^{-m}\mathbf{x}(n), P_{0,m-1}^\perp(n)z^{-m}\mathbf{x}(n) \rangle \end{aligned}$$

偏相关系数为

$$\Delta_{m+1}(n) = \langle \mathbf{e}_m^f(n), z^{-1}\mathbf{e}_m^b(n) \rangle$$

证明

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m+1}^f(n) &= \varepsilon_m^f(n) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\varepsilon_m^b(n-1)} \\ \varepsilon_{m+1}^b(n) &= \varepsilon_m^b(n-1) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\varepsilon_m^f(n)} \end{aligned}$$

**题 4.25** 设计一格型 IIR 滤波器, 使其传递函数为

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 1.89z + 0.89}$$

**题 4.26** <sup>[52]</sup> 平稳环境下, 用户 1 的盲多用户检测器  $c_1$  的一种典范表示为

$$c_1(n) = s_1 - C_{1,\text{null}} w_1(n)$$

式中  $s_1$  是用户 1 的  $N \times 1$  特征波形向量,  $N \times (N-1)$  维矩阵  $C_{1,\text{null}}$  的  $N-1$  列张成  $s_1$  的零空间。现使用 Kalman 滤波算法自适应更新权向量  $w_{\text{opt}1}(n)$ 。

假定状态空间方程由状态方程

$$w_{\text{opt}1}(n+1) = w_{\text{opt}1}(n) \quad (\text{题 4.26.1})$$

和观测方程

$$\tilde{y}(n) = d^T(n) w_{\text{opt}1}(n) + e_{\text{opt}} \quad (\text{题 4.26.2})$$

组成。

定义预测状态误差向量

$$\varepsilon(n, n-1) = w_{\text{opt}1}(n) - \hat{w}_{\text{opt}1}(n) \quad (\text{题 4.26.3})$$

和预测状态误差相关矩阵

$$\begin{aligned} K(n+1, n) &= E \{ \varepsilon(n+1, n) \varepsilon^T(n+1, n) \} \\ &= E \left\{ [w_{\text{opt}1}(n+1) - \hat{w}_{\text{opt}1}(n+1)] [w_{\text{opt}1}(n+1) - \hat{w}_{\text{opt}1}(n+1)]^T \right\} \end{aligned} \quad (\text{题 4.26.4})$$

若平均输出能量定义为

$$\xi(n) = \text{MOE}(w_1(n)) \quad (\text{题 4.26.5})$$

最小平均输出能量定义为

$$\xi_{\min}(n) = \text{MOE}(w_{\text{opt}1}(n)) = E\{e_{\text{opt}}^2\} \quad (\text{题 4.26.6})$$

并且

$$K(n+1, n) = \xi_{\min} \left( \xi_{\min} I + \sum_{k=1}^n d(k) d^T(k) \right)^{-1} \quad (\text{题 4.26.7})$$

证明 Kalman 滤波算法自适应更新的权向量  $w_1(n)$  的平均输出能量满足不等式

$$\xi(n) \leq \xi_{\min}(1 + n^{-1}N)$$

## 4.3 习题解答

题 4.1 匹配滤波器的冲激响应为

$$h_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ s(T-t), & t > 0 \end{cases}$$

于是, 匹配滤波器的输出

$$\begin{aligned} y_0(T) &= y(t) * h_0(t)|_{t=T} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)h_0(T-t)dt \\ &= \int_0^T y(t)s(t)dt \\ &= \int_0^T [s(t) + w(t)]s(t)dt \\ &= \int_0^T s^2(t)dt + \int_0^T w(t)s(t)dt \\ &= \int_0^T A^2 \cos^2(2\pi f_c t)dt + \int_0^T w(t)A \cos(2\pi f_c t)dt \\ &= \frac{A^2}{2} \int_0^T [1 + \cos(4\pi f_c t)]dt + \int_0^T w(t)A \cos(2\pi f_c t)dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cdot T + \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos(4\pi f_c t)dt + A \int_0^T w(t) \cos(2\pi f_c t)dt \\ &= \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2 \sin(4\pi f_c t)}{4\pi f_c} \Big|_0^T + A \int_0^T \cos(2\pi f_c t)w(t)dt \end{aligned} \quad (\text{题 4.1.1})$$

注意, 由于  $f_c = 1/T$ , 故  $\sin(4\pi f_c T) = 0$ . 于是, 式 (题 4.1.1) 变作

$$y_0(T) = \frac{A^2 T}{2} + A \int_0^T \cos(2\pi f_c t)w(t)dt = E_s + e_1 \quad (\text{题 4.1.2})$$

式中

$$E_s = A^2 T/2 \quad (\text{题 4.1.3})$$

$$e_1 = A \int_0^T \cos(2\pi f_c t)w(t)dt \quad (\text{题 4.1.4})$$

这里,  $E_s$  和  $e_1$  分别表示匹配滤波器的输出信号和输出噪声。

下面求  $y_0(T)$  的均值和方差。

由题知

$$E\{w(t)\} = 0$$

故

$$E\{e_1\} = \int_0^T A \cos(2\pi f_c t) E\{w(t)\} dt = 0$$

从而得匹配滤波器输出的均值

$$E\{y_0(T)\} = E\{E_s\} + E\{e_1\} = E_s \quad (\text{题 4.1.5})$$

或写作  $E\{y_0(T) - E_s\} = E\{e_1\}$ 。于是, 有

$$\begin{aligned} E\{[y_0(T) - E_s]^2\} &= E\{e_1^2\} \\ &= E\left\{\int_0^T \int_0^T A \cos(2\pi f_c t) A \cos(2\pi f_c u) w(t) w(u) dt du\right\} \\ &= A^2 \int_0^T \int_0^T \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c u) E\{w(t)w(u)\} dt du \\ &= A^2 \int_0^T \sigma^2 \cos^2(2\pi f_c t) dt \end{aligned} \quad (\text{题 4.1.6})$$

式中利用了已知条件

$$E\{w(t)w(u)\} = \sigma^2 \delta(t - u)$$

这里

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

计算式 (题 4.1.6) 得

$$\begin{aligned} E\{[y_0(T) - E_s]^2\} &= A^2 \sigma^2 \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos(4\pi f_c t)] dt \\ &= \frac{1}{2} A^2 \sigma^2 T + \frac{1}{2} A^2 \sigma^2 \frac{\sin(4\pi f_c t)}{4\pi f_c} \Big|_0^T \end{aligned} \quad (\text{题 4.1.7})$$

由于  $f_c = 1/T$ , 故  $\sin(4\pi f_c T) = \sin(4\pi) = 0$ 。将这一结果代入式 (题 4.1.7), 则

$$E\{[y_0(T) - E_s]^2\} = \frac{1}{2} A^2 \sigma^2 T = \sigma^2 E_s \quad (\text{题 4.1.8})$$

答案:  $y(T_0)$  的均值等于  $E_s$ , 方差为  $\sigma^2 E_s$ .

题 4.2 此时, 匹配滤波器的冲激响应满足

$$h_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ s_1(T-t), & t \geq 0 \end{cases}$$

由题 4.1 知, 每当发射机发射信号  $s_1(t)$  时, 匹配滤波器的输出

$$y_0^{(1)}(T) = E_s + \int_0^T A \cos(2\pi f_c t) w(t) dt$$

式中  $E_s = \frac{1}{2} A^2 T$ , 且匹配滤波器输出的均值和方差为

$$E\{y_0^{(1)}(T)\} = E_s \quad (\text{题 4.2.1})$$

$$\text{var}[y_0^{(1)}(T)] = \sigma^2 E_s \quad (\text{题 4.2.2})$$

而每当发射机发射信号  $s_2(t)$  时, 匹配滤波器的输出为

$$\begin{aligned} y_0^{(2)}(T) &= y(t) * h_0(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) h_0(T-t) dt \\ &= \int_0^T y(t) s_1(t) dt \\ &= \int_0^T [s_2(t) + w(t)] s_1(t) dt \\ &= \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt + \int_0^T w(t) s_1(t) dt \\ &= \int_0^T A^2 \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) dt + \int_0^T w(t) A \cos(2\pi f_c t) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \int_0^T \sin(4\pi f_c t) dt + \int_0^T w(t) A \cos(2\pi f_c t) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \left[ -\frac{\cos(4\pi f_c t)}{4\pi f_c} \right]_0^T + A \int_0^T w(t) \cos(2\pi f_c t) dt \\ &= 0 + A \int_0^T \cos(2\pi f_c t) w(t) dt \end{aligned} \quad (\text{题 4.2.3})$$

因为  $\cos(4\pi f_c T) = \cos(4\pi) = 1$ .

类似于题 4.1, 可以证明: 当发射机发射信号  $s_2(t)$  时, 匹配滤波器输出  $y_0^{(2)}(T)$

的均值和方差分别为

$$E\{y_0^{(2)}(T)\} = 0 \quad (\text{题 4.2.4})$$

$$\text{var}[y_0^{(2)}(T)] = \sigma^2 E_s \quad (\text{题 4.2.5})$$

因此, 综合式 (题 4.2.1) 和式 (题 4.2.4) 知, 匹配滤波器输出的期望值为

$$E\{y_0(T)\} = \begin{cases} E_s, & \text{发射信号 } s_1(t) \text{ 时} \\ 0, & \text{发射信号 } s_2(t) \text{ 时} \end{cases} \quad (\text{题 4.2.6})$$

可见, 从匹配滤波器的输出, 能够判断发射机是在发射  $s_1(t)$  还是  $s_2(t)$ , 分析其原因, 这主要是因为两个发射信号之间的互相关

$$\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = \int_0^T \sin(4\pi f_c t)dt = 0$$

即有  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  相互正交。这个习题说明, 匹配滤波器可以用来识别两个正交的信号。

**答案:** 抽取信号  $s_1(t)$  的匹配滤波器的输出的数学期望值由式 (题 4.2.6) 给出。

**题 4.3** 匹配滤波器的传递函数由下式给出:

$$H_{\text{opt}}(f) = \frac{S(-f)}{P_n(f)} e^{-j2\pi f T_0} \quad (\text{题 4.3.1})$$

式中  $S(f)$  是信号  $s(t)$  的频谱, 而  $P_n(f)$  是噪声  $n(t)$  的功率谱密度。

由题知

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{1 + j2\pi f} \quad (\text{题 4.3.2})$$

由于  $n(t)$  是零均值、单位方差的白噪声, 故其功率谱密度

$$P_n(f) = 1, \quad \forall f \quad (\text{题 4.3.3})$$

将式 (题 4.3.2) 和式 (题 4.3.3) 代入式 (题 4.3.1) 得

$$H_{\text{opt}}(f) = \frac{e^{-j2\pi f T_0}}{1 - j2\pi f} \quad (\text{题 4.3.4})$$

于是, 匹配滤波器的冲激响应为

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{opt}}(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j2\pi f(T_0-t)}}{1-j2\pi f}df \\ &= \begin{cases} e^{-(T_0-t)}, & t \leq T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{题 4.3.5})$$

答案: 匹配滤波器的冲激响应由

$$h_0(t) \begin{cases} e^{-(T_0-t)}, & t \leq T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases}$$

决定.

题 4.4 由于  $R_{sv}(\tau) \equiv 0$ , 所以

$$\begin{aligned} R_{sz}(\tau) &= \text{E}\{s(t)[s(t-\tau) + v(t-\tau)]\} = R_{ss}(\tau) \\ &= A \frac{\sin^2(\alpha\tau)}{\tau^2} \end{aligned} \quad (\text{题 4.4.1})$$

而

$$\begin{aligned} R_{xz}(\tau) &= \text{E}\{[s(t) + v(t)][s(t-\tau) + v(t-\tau)]\} = R_{ss}(\tau) + R_{vv}(\tau) \\ &= A \frac{\sin^2(\alpha\tau)}{\tau^2} + N\delta(\tau) \end{aligned} \quad (\text{题 4.4.2})$$

对式 (题 4.4.1) 和式 (题 4.4.2) 分别作 Fourier 变换, 得到

$$\begin{aligned} P_{sz}(\omega) &= P_{ss}(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{\sin^2(\alpha\tau)}{\tau^2} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \begin{cases} \alpha A\pi \left(1 - \frac{2|\omega|}{4\alpha}\right), & |\omega| < 2\alpha \\ 0, & |\omega| \geq 2\alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{题 4.4.3})$$

和

$$\begin{aligned} P_{xz}(\omega) &= P_{ss}(\omega) + P_{vv}(\omega) \\ &= N + \begin{cases} \alpha A\pi \left(1 - \frac{2|\omega|}{4\alpha}\right), & |\omega| < 2\alpha \\ 0, & |\omega| \geq 2\alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{题 4.4.4})$$

最后, 非因果 Wiener 滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{P_{sx}(\omega)}{P_{xx}(\omega)} = \frac{P_{ss}(\omega)}{P_{ss}(\omega) + P_{vv}(\omega)} \\
 &= \begin{cases} \frac{\alpha A \pi \left(1 - \frac{2|\omega|^2}{4\alpha}\right)}{\alpha A \pi \left(1 - \frac{2|\omega|^2}{4\alpha}\right) + N}, & |\omega| < 2\alpha \\ 0, & |\omega| \geq 2\alpha \end{cases} \quad (\text{题 4.4.5})
 \end{aligned}$$

**答案:** 非因果 Wiener 滤波器的传递函数如下式所示:

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{\alpha A \pi \left(1 - \frac{2|\omega|^2}{4\alpha}\right)}{\alpha A \pi \left(1 - \frac{2|\omega|^2}{4\alpha}\right) + N}, & |\omega| < 2\alpha \\ 0, & |\omega| \geq 2\alpha \end{cases}$$

**题 4.5** 由于信号和噪声的均值都等于零, 所以  $C_{ss}(\tau) = R_{ss}(\tau)$  和  $C_{nn}(\tau) = R_{nn}(\tau)$ . 于是, 信号  $s(t)$  的功率谱

$$\begin{aligned}
 P_{ss}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{ss}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{1 + \omega^2} \quad (\text{题 4.5.1})
 \end{aligned}$$

而噪声的功率谱为

$$\begin{aligned}
 P_{nn}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{nn}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= 1 \quad (\text{题 4.5.2})
 \end{aligned}$$

由 4.1 节的算法 4.1, 因果 Wiener 滤波器的设计步骤如下:

步骤 1 观测过程  $y(t)$  的功率谱

$$P_{yy}(\omega) = P_{ss}(\omega) + P_{nn}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} + 1 = \frac{2 + \omega^2}{1 + \omega^2} \quad (\text{题 4.5.3})$$

而  $y(t)$  和  $s(t)$  的互功率谱

$$\begin{aligned}
 P_{sy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{sy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{s(t)[s(t-\tau) + n(t-\tau)]\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{ss}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= P_{ss}(\omega)
 \end{aligned} \tag{题 4.5.4}$$

由功率谱分解

$$P_{yy}(\omega) = \frac{(\sqrt{2} + j\omega)(\sqrt{2} - j\omega)}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)} = A_{yy}^+(\omega) A_{yy}^-(\omega)$$

知

$$\begin{aligned}
 A_{yy}^+(\omega) &= \frac{\sqrt{2} + j\omega}{1 + j\omega} \\
 A_{yy}^-(\omega) &= \frac{\sqrt{2} - j\omega}{1 - j\omega}
 \end{aligned}$$

步骤 2 计算

$$\begin{aligned}
 \frac{P_{sy}(\omega)}{A_{yy}^-(\omega)} &= \frac{P_{ss}(\omega)}{A_{yy}^-(\omega)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} - j\omega}{1 - j\omega}} \\
 &= \frac{1}{(1 + j\omega)(\sqrt{2} - j\omega)} \\
 &= \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + j\omega} + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - j\omega} \\
 &= B^+(\omega) + B^-(\omega)
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 B^+(\omega) &= \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + j\omega} \\
 B^-(\omega) &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - j\omega}
 \end{aligned}$$

注意,  $B^-(\omega)$  并不是  $B^+(\omega)$  的共轭。

步骤 3 因果 Wiener 滤波器的传递函数为

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{B^+(\omega)}{A_{yy}^+(\omega)} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{1+j\omega}}{\frac{\sqrt{2}+j\omega}{1+j\omega}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+j\omega} \quad (\text{题 4.5.5})$$

答案: 因果 Wiener 滤波器的传递函数为

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+j\omega}$$

**题 4.6** 由已知条件  $P_{sn}(\omega) = 0$  知, 信号  $s(t)$  与噪声  $n(t)$  不相关, 故有  $R_{sy}(\tau) = R_{ss}(\tau)$ , 从而得

$$P_{sy}(\omega) = P_{ss}(\omega) \quad (\text{题 4.6.1})$$

步骤 1 观测过程  $y(t)$  的功率谱

$$P_{yy}(\omega) = P_{ss}(\omega) + P_{nn}(\omega) = \frac{N_0}{\alpha^2 + \omega^2} + N = N \frac{\beta^2 + \omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{题 4.6.2})$$

式中  $\beta^2 = \alpha^2 + \frac{N_0}{N}$ . 由此得到谱分解形式:

$$P_{yy}(\omega) = \sqrt{N} \frac{\beta + j\omega}{\alpha + j\omega} \cdot \sqrt{N} \frac{\beta - j\omega}{\alpha - j\omega} = A_{yy}^+(\omega) A_{yy}^-(\omega)$$

即有

$$A_{yy}^+(\omega) = \sqrt{N} \frac{\beta + j\omega}{\alpha + j\omega}$$

$$A_{yy}^-(\omega) = \sqrt{N} \frac{\beta - j\omega}{\alpha - j\omega}$$

步骤 2 计算

$$\begin{aligned} \frac{P_{sy}(\omega)}{A_{yy}^-(\omega)} &= \frac{P_{ss}(\omega)}{A_{yy}^-(\omega)} = \frac{\frac{N_0}{\alpha^2 + \omega^2}}{\sqrt{N} \frac{\beta - j\omega}{\alpha - j\omega}} \\ &= \frac{N_0}{\sqrt{N}} \frac{1}{(\alpha + j\omega)(\beta - j\omega)} \\ &= B^+(\omega) + B^-(\omega) \end{aligned} \quad (\text{题 4.6.3})$$

故有

$$B^+(\omega) = A \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$B^-(\omega) = A \frac{1}{\beta - j\omega}$$

其中

$$A = \frac{N_0}{(\alpha + \beta)\sqrt{N}}$$

步骤 3 因果 Wiener 滤波器的传递函数为

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{B^+(\omega)}{A_{vv}^+(\omega)} = A \frac{\frac{1}{\alpha + j\omega}}{\sqrt{N} \frac{\beta + j\omega}{\alpha + j\omega}}$$

$$= \frac{N_0}{N(\alpha + \beta)(\beta + j\omega)} \quad (\text{题 4.6.4})$$

答案: 因果 Wiener 滤波器的传递函数为

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{N_0}{N(\alpha + \beta)(\beta + j\omega)}$$

题 4.7 由题知, 期望信号  $d(n)$  的功率谱为 AR 功率谱, 即

$$P_{dd}(z) = \frac{\sigma_w^2}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} = \frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} \quad (\text{题 4.7.1})$$

步骤 1 观测过程  $x(n)$  的功率谱

$$P_{xx}(z) = P_{dd}(z) + P_{vv}(z) = \frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} + 1$$

$$= 1.6 \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}$$

$$= A_{xx}^+(z)A_{xx}^-(z) \quad (\text{题 4.7.2})$$

由此得谱分解形式:

$$A_{xx}^+ = \sqrt{1.6} \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

$$A_{xx}^- = \sqrt{1.6} \frac{1 - 0.5z}{1 - 0.8z}$$

注意,  $A_{xx}^+$  的零、极点均位于单位圆外, 对应为系统的最大相位和非因果部分; 而  $A_{xx}^-$  的零、极点则全部在单位圆内, 对应为系统的最小相位和因果部分。

步骤 2 由于  $R_{dx}(k) = E\{d(n)x(n-k)\} = E\{d(n)[d(n-k) + v(n-k)]\} = E\{d(n)d(n-k)\} = R_{dd}(k)$ , 故有  $P_{dx}(z) = P_{dd}(z)$ . 从而, 得

$$\begin{aligned} \frac{P_{dx}(z)}{A_{xx}(z)} &= \frac{P_{dd}(z)}{A_{xx}(z)} = \frac{0.36}{\sqrt{1.6} \frac{1-0.5z}{1-0.8z}} \\ &= \frac{0.36}{\sqrt{1.6}(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \\ &= B^+(z) + B^-(z) \end{aligned} \quad (\text{题 4.7.3})$$

故有

$$\begin{aligned} B^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{1.6}} \frac{0.6}{1-0.8z^{-1}} \\ B^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{1.6}} \frac{0.3z}{1-0.5z} \end{aligned}$$

步骤 3 因果 Wiener 滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{B^+(z)}{A_{yy}^+(z)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1.6}} \frac{0.6}{1-0.8z^{-1}}}{\sqrt{1.6} \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}} \\ &= \frac{0.375}{1-0.5z^{-1}} \end{aligned} \quad (\text{题 4.7.4})$$

由于估计值  $d(n)$  是观测数据  $x(n)$  通过 Wiener 滤波器的输出, 所以频谱  $\hat{D}(z)$  等于滤波器传递函数  $H(z)$  与输入信号频谱  $X(z)$  的乘积, 即有

$$\hat{D}(z) = H(z)X(z) = \frac{0.375}{1-0.5z^{-1}}X(z)$$

或

$$\hat{D}(z)(1-0.5z^{-1}) = 0.375X(z) \quad (\text{题 4.7.5})$$

作  $Z$  反变换, 即得

$$\hat{d}(n) = 0.5\hat{d}(n-1) + 0.375x(n) \quad (\text{题 4.7.6})$$

答案: 估计值  $\hat{d}(n)$  的递推公式由式 (题 4.7.6) 给出.

题 4.8 由题意, 我们可以写出 Wiener-Hopf 方程:

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sx}(0) \\ R_{sx}(1) \end{bmatrix} \quad (\text{题 4.8.1})$$

但是, 由于  $s(n)$  与  $v(n)$  不相关, 故  $R_x(k) = R_s(k) + R_v(k) = \alpha^{|k|} + \sigma_v^2 \delta(k)$  和  $R_{sx}(k) = E\{s(n)x(n-k)\} = E\{s(n)[s(n-k) + v(n-k)]\} = E\{s(n)s(n-k)\} = R_s(k)$ , 故有  $R_{sx}(k) = R_s(k) = \alpha^{|k|}$ . 将这些值代入式 (题 4.8.1) 得

$$\begin{bmatrix} 1 + \sigma_v^2 & \alpha \\ \alpha & 1 + \sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{题 4.8.2})$$

解之, 得

$$w(0) = \frac{1 + \sigma_v^2 - \alpha^2}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2} \quad (\text{题 4.8.3})$$

$$w(1) = \frac{\alpha \sigma_v^2}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2} \quad (\text{题 4.8.4})$$

**答案:** Wiener 滤波器的传递函数  $H(z) = w(0) + w(1)z^{-1}$ , 其中  $w(0)$  和  $w(1)$  分别由式 (题 4.8.3) 和式 (题 4.8.4) 给出.

#### 题 4.9 滤波器输出

$$\begin{aligned} \hat{s}(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n-i) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)[s(n-i) + v(n-i)] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)s(n-i) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)v(n-i) \end{aligned} \quad (\text{题 4.9.1})$$

根据定义, 滤波器的最小均方误差为

$$\begin{aligned} J_{\min} &\stackrel{\text{def}}{=} E\{|\hat{s}(n) - s(n)|^2\} \\ &= E\left\{ \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)s(n-i) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)v(n-i) - s(n) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)s(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)v(n-k) - s(n) \right]^* \right\} \\ &= R_s(0) - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)R_{sx}^*(i) \end{aligned} \quad (\text{题 4.9.2})$$

令  $P_s(\omega)$  为期望信号的功率谱, 则

$$R(0) = E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_s(\omega) d\omega \quad (\text{题 4.9.3})$$

另外一方面, 根据 Parseval 定理知  $\langle h(i), R_{sx}(i) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle H(e^{j\omega}), P_{sx}(\omega) \rangle$ , 其中  $P_{sx}(\omega)$  是期望信号  $s(n)$  与观测数据  $x(n) = s(n) + v(n)$  之间的互功率谱。因此, 我们有

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)R_{sx}^*(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})P_{sx}^*(\omega)d\omega \quad (\text{题 4.9.4})$$

将式 (题 4.9.3) 和式 (题 4.9.4) 代入式 (题 4.9.2), 即可写出最小均方误差的频域表达式为

$$J_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P_s(\omega) - H(e^{j\omega})P_{sx}^*(\omega)]d\omega \quad (\text{题 4.9.5})$$

由题意知  $R_x(k) = R_s(k) + R_v(k)$ , 从而有  $P_x(\omega) = P_s(\omega) + P_v(\omega)$ ; 而  $R_{sx}(k) = E\{s(n)x^*(n-k)\} = E\{s(n)[s(n-k) + v(n-k)]^*\} = E\{s(n)s^*(n-k)\} = R_s(k)$ , 即有  $P_{sx}(\omega) = P_s(\omega)$ 。于是, IIR Wiener 滤波器为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{P_s(\omega)}{P_{sx}(\omega)} = \frac{P_s(\omega)}{P_s(\omega) + P_v(\omega)} \quad (\text{题 4.9.6})$$

将式 (题 4.9.6) 代入式 (题 4.9.5), 计算得

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_s(\omega)[1 - H(e^{j\omega})]d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_s(\omega) \left[ 1 - \frac{P_s(\omega)}{P_s(\omega) + P_v(\omega)} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_s(\omega) \frac{P_v(\omega)}{P_s(\omega) + P_v(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (\text{题 4.9.7})$$

将式 (题 4.9.6) 代入式 (题 4.9.7), 即得到最小均方误差的表达式为

$$J_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_v(\omega)H(e^{j\omega})d\omega \quad (\text{题 4.9.8})$$

**答案:** Wiener 滤波器的最小均方误差如式 (题 4.9.8) 所示。该式表明, Wiener 滤波器  $H(e^{j\omega})$  的最小均方误差就是以加性噪声  $v(n)$  作滤波器的输入时, 滤波器输出的能量。这就是最小均方误差的物理涵义。

#### 题 4.10 新息过程为

$$\begin{aligned} w(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= y(t) - \int_0^t a(t,u)y(u)du \\ &= y(t) - \frac{m}{(1+t)^m} \int_0^t (1+u)^{m-1}y(u)du \end{aligned} \quad (\text{题 4.10.1})$$

上式两边同乘  $(1+t)^m$  后, 得

$$(1+t)^m w(t) = (1+t)^m y(t) - m \int_0^t (1+u)^{m-1} y(u) du \quad (\text{题 4.10.2})$$

式右的第二项为

$$m \int_0^t (1+u)^{m-1} y(u) du = (1+t)^m y(t) - y(0) - \int_0^t (1+u)^m \dot{y}(u) du \quad (\text{题 4.10.3})$$

式中  $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$  表示观测过程  $y(t)$  的一阶导数。

将式 (题 4.10.3) 代入式 (题 4.10.2), 则有

$$(1+t)^m w(t) = y(0) + \int_0^t (1+u)^m \dot{y}(u) du \quad (\text{题 4.10.4})$$

上式相对于  $t$  求导数, 结果为

$$m(1+t)^{m-1} w(t) + (1+t)^m \dot{w}(t) = (1+t)^m \dot{y}(t)$$

简化后, 得

$$\dot{y}(t) = \frac{m}{1+t} w(t) + \dot{w}(t) \quad (\text{题 4.10.5})$$

对上式两边求积分, 则有

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{m}{1+u} w(u) du + w(t) \\ &= w(t) + \int_0^t b(t, u) w(u) du \\ &= w(t) + w(u) * b(t, u) \end{aligned} \quad (\text{题 4.10.6})$$

式中

$$b(t, u) = \begin{cases} \frac{m}{1+u}, & 0 \leq u \leq t \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 4.10.7})$$

式 (题 4.10.6) 表明, 观测过程  $y(t)$  可以等价表示成新息过程  $w(t)$  与新息滤波器  $b(t, u)$  的输出  $w(u) * b(t, u)$  之和。

**答案:** 新息滤波器由式 (题 4.10.7) 给出。注意, 新息滤波器的输出即是  $x(t)$  的线性均方估计, 即有

$$\hat{x}(t) = \int_0^t b(t, u) w(u) du = \int_0^t \frac{m}{1+u} w(u) du \quad (\text{题 4.10.8})$$

题 4.11 我们对功率谱  $P_{yy}(\omega)$  进行谱分解:

$$\begin{aligned} P_{yy}(\omega) &= \frac{(j\omega + 5)(-j\omega + 5)}{(j\omega + 1)(-j\omega + 1)(j\omega + 2)(-j\omega + 2)} \\ &= \frac{j\omega + 5}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} \cdot \frac{-j\omega + 5}{(-j\omega + 1)(-j\omega + 2)} \\ &= A_{yy}^+(\omega)A_{yy}^-(\omega) \end{aligned} \quad (\text{题 4.11.1})$$

式中

$$\begin{aligned} A_{yy}^+(\omega) &= \frac{j\omega + 5}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} \\ A_{yy}^-(\omega) &= \frac{-j\omega + 5}{(-j\omega + 1)(-j\omega + 2)} \end{aligned}$$

令  $s = j\omega$ , 则

$$A_{yy}^+(s) = \frac{s + 5}{(s + 1)(s + 2)} \quad (\text{题 4.11.2})$$

$$A_{yy}^-(s) = \frac{-s + 5}{(-s + 1)(-s + 2)} \quad (\text{题 4.11.3})$$

由于  $A_{yy}^+(s)$  的零、极点全部位于左半平面, 而  $A_{yy}^-(s)$  的零、极点均在右半平面, 所以新息滤波器的传递函数由

$$H(\omega) = A_{yy}^+(\omega) = \frac{j\omega + 5}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} \quad (\text{题 4.11.4a})$$

或

$$H(s) = \frac{s + 5}{(s + 1)(s + 2)} \quad (\text{题 4.11.4b})$$

给出, 它是物理可实现的因果系统。

于是, 新息滤波器的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(k) &= \int_{-\infty}^0 H(s)e^{sk} ds \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{s + 5}{(s + 1)(s + 2)} e^{sk} ds \\ &= \int_{-\infty}^0 \left( \frac{4}{s + 1} - \frac{3}{s + 2} \right) e^{sk} ds \\ &= \begin{cases} 4e^{-k} - 3e^{-2k}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{题 4.11.5})$$

可见, 新息滤波器是一个时不变的滤波器. 新息过程等于观测信号  $y(t)$  与新息滤波器冲激响应  $h(k)$  的卷积, 即有

$$\begin{aligned} w(t) &= y(t) * h(t) \\ &= \int_0^t y(u)h(t-u)du \\ &= \int_0^t [4e^{-(t-u)} - 3e^{-2(t-u)}]y(u)du \\ &= 4e^{-t} \int_0^t e^u y(u)du - 3e^{-2t} \int_0^t e^{2u} y(u)du \end{aligned} \quad (\text{题 4.11.6})$$

因此, 信号  $\hat{s}(t)$  的线性均方估计由下式给出:

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= y(t) - w(t) \\ &= y(t) - \left( 4e^{-t} \int_0^t e^u y(u)du - 3e^{-2t} \int_0^t e^{2u} y(u)du \right) \end{aligned} \quad (\text{题 4.11.7})$$

答案: 信号  $\hat{s}(t)$  的线性均方估计为

$$\hat{s}(t) = y(t) - \left( 4e^{-t} \int_0^t e^u y(u)du - 3e^{-2t} \int_0^t e^{2u} y(u)du \right)$$

**题 4.12** 由于  $x(t)$  是一个时不变的随机变量, 故  $x(t)$  关于时间  $t$  的一阶导数等于 0, 即有

$$\dot{x} = 0 \quad (\text{题 4.12.1})$$

这就是连续时间的状态方程. 观测方程为

$$y(t) = x(t) + v(t) \quad (\text{题 4.12.2})$$

令  $x(t)$  是一个具有均值  $\bar{x}_0$ 、方差  $p_0$  的随机变量, 记作  $x \sim (\bar{x}_0, p_0)$ ; 加性观测噪声  $v(t)$  的均值为 0, 方差为  $\sigma_v^2$ , 记作  $v(t) \sim (0, \sigma_v^2)$ . 现在, 用  $T = 1$  作为采样间隔, 对  $x(t)$  和  $v(t)$  等离散化, 则式 (题 4.12.1) 和式 (题 4.12.2) 变为离散时间的状态空间模型:

$$x(n+1) = x(n) \quad (\text{题 4.12.3})$$

$$y(n) = x(n) + v(n) \quad (\text{题 4.12.4})$$

式中, 加性观测噪声  $v(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ .

上述状态空间模型的 Kalman 滤波算法如下:

$$g(n) = \frac{K(n, n-1)}{K(n, n-1) + \sigma_v^2}$$

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + g(n)[y(n) - \hat{x}(n)]$$

$$K(n+1, n) = K(n, n-1)[1 - g(n)] = g(n)\sigma_v^2$$

下面求  $g(n)$  的一般表达式.

由于  $K(1, 0) = E\{|x(1) - E\{x(1)\}|^2\} = p_0$ , 故当  $n = 1$  时, 有

$$g(1) = \frac{K(1, 0)}{K(1, 0) + \sigma_v^2} = \frac{p_0}{p_0 + \sigma_v^2}$$

$$K(2, 1) = g(1)\sigma_v^2 = \frac{p_0\sigma_v^2}{p_0 + \sigma_v^2}$$

当  $n = 2$  时, 则有

$$g(2) = \frac{K(2, 1)}{K(2, 1) + \sigma_v^2} = \frac{p_0}{2p_0 + \sigma_v^2}$$

$$K(3, 2) = g(2)\sigma_v^2 = \frac{p_0\sigma_v^2}{2p_0 + \sigma_v^2}$$

当  $n = 3$  时, 有

$$g(3) = \frac{K(3, 2)}{K(3, 2) + \sigma_v^2} = \frac{p_0}{3p_0 + \sigma_v^2}$$

$$K(4, 3) = g(3)\sigma_v^2 = \frac{p_0\sigma_v^2}{3p_0 + \sigma_v^2}$$

若令

$$g(n-1) = \frac{p_0}{(n-1)p_0 + \sigma_v^2}$$

$$K(n, n-1) = g(n-1)\sigma_v^2 = \frac{p_0\sigma_v^2}{(n-1)p_0 + \sigma_v^2}$$

则

$$g(n) = \frac{K(n, n-1)}{K(n, n-1) + \sigma_v^2} = \frac{p_0}{np_0 + \sigma_v^2} \quad (\text{题 4.12.5})$$

和

$$K(n+1, n) = g(n)\sigma_v^2 = \frac{p_0\sigma_v^2}{np_0 + \sigma_v^2} \quad (\text{题 4.12.6})$$

可见, 式 (题 4.12.5) 和式 (题 4.12.6) 分别是 Kalman 增益  $g(n)$  和状态变量预测误差的方差  $K(n+1, n)$  的更新公式.

**答案:** 总结以上讨论, 可得到估计状态变量的 Kalman 滤波算法如下:

对于  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$g(n) = \frac{p_0}{np_0 + \sigma_v^2} \quad (\text{题 4.12.7})$$

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + g(n)[y(n) - \hat{x}(n)] \quad (\text{题 4.12.8})$$

$$K(n+1, n) = g(n)\sigma_v^2 \quad (\text{题 4.12.9})$$

**题 4.13** 当加性白噪声  $v(t)$  的方差  $\sigma_v^2$  无穷大时, 式 (题 4.12.7) 变成

$$g(n) = 0$$

将此式代入式 (题 4.12.8) 后, 即有

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) = \dots = \hat{x}(1)$$

这表明, Kalman 滤波器除了初始值  $\hat{x}(1)$  以外, 不能告诉我们任何其他信息。

若状态变量  $x(n)$  的初始值  $\hat{x}(1) = 0$ , 且方差  $p_0 = \infty$  时, 则式 (题 4.12.7) 变成

$$g(n) = \frac{1}{n}$$

将它代入式 (题 4.12.8) 后, 则有

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n}[y(n) - \hat{x}(n)]$$

这只不过是样本均值的递推公式。因此, 当状态变量  $x(n)$  的方差无穷大时, Kalman 滤波器给出的状态变量估计只是状态变量的样本均值。

**题 4.14** 由题意知, 状态转移矩阵  $F(n+1, n) = 0.8$ , 过程噪声向量的相关函数矩阵  $Q_1 = \sigma_w^2 = 0.36$ , 观测矩阵  $C(n) = 1$ , 观测噪声向量的相关函数矩阵  $Q_2 = \sigma_v^2 = 1$ 。将这些值代入 4.1 节的算法 4.3 (Kalman 自适应滤波算法) 中, 即得标量随机过程的 Kalman 滤波算法如下:

$$g(n) = F(n+1, n)K(n, n-1)[K(n, n-1) + \sigma_v^2]^{-1} \quad (\text{题 4.14.1a})$$

$$\begin{aligned} P(n) &= K(n, n-1) - F^{-1}(n+1, n)g(n)K(n, n-1) \\ &= [1 - F^{-1}(n+1, n)g(n)]K(n, n-1) \end{aligned} \quad (\text{题 4.14.1b})$$

$$\hat{x}(n+1) = F(n+1, n)\hat{x}(n) + g(n)[y(n) - \hat{x}(n)] \quad (\text{题 4.14.1c})$$

$$K(n+1, n) = F(n+1, n)P(n)F(n+1, n) + \sigma_w^2 \quad (\text{题 4.14.1d})$$

消去  $P(n)$ , 并代入题给具体数据, 则有

$$g(n) = \frac{0.8K(n, n-1)}{K(n, n-1) + 1} \quad (\text{题 4.14.2a})$$

$$\hat{x}(n+1) = 0.8\hat{x}(n) + g(n)[y(n) - \hat{x}(n)] \quad (\text{题 4.14.2b})$$

$$K(n+1, n) = \frac{K(n, n-1) + 0.36}{K(n, n-1) + 1} \quad (\text{题 4.14.2c})$$

初始值取  $\hat{x}(1) = E\{x(1)\} = 0$  和  $K(1, 0) = E\{|x(1)|^2\} = 1$ .

当  $n = 1$  时

$$g(1) = \frac{0.8K(1, 0)}{K(1, 0) + 1} = \frac{0.8 \times 1}{1 + 1} = 0.4$$

$$K(2, 1) = \frac{K(1, 0) + 0.36}{K(1, 0) + 1} = \frac{1.36}{2} = 0.68$$

当  $n = 2$  时

$$g(2) = \frac{0.8K(2, 1)}{K(2, 1) + 1} = \frac{0.8 \times 0.68}{0.68 + 1} \approx 0.324$$

$$K(3, 2) = \frac{K(2, 1) + 0.36}{K(2, 1) + 1} = \frac{0.68 + 0.36}{0.68 + 1} = 0.589$$

当  $n = 3$  时

$$g(3) = \frac{0.8K(3, 2)}{K(3, 2) + 1} = \frac{0.8 \times 0.589}{0.589 + 1} \approx 0.3$$

$$K(4, 3) = \frac{K(3, 2) + 0.36}{K(3, 2) + 1} = \frac{0.589 + 0.36}{1.589} = 0.59$$

当  $n = 4$  时

$$g(4) = \frac{0.8K(4, 3)}{K(4, 3) + 1} = \frac{0.8 \times 0.59}{0.59 + 1} \approx 0.3$$

$$K(5, 4) = \frac{K(4, 3) + 0.36}{K(4, 3) + 1} = \frac{0.59 + 0.36}{1.59} = 0.59$$

可见, 当  $n = 3, 4, \dots$  时, Kalman 增益已收敛为  $g(n) = 0.3$ .

答案:  $\hat{x}(n)$  的递推公式为

$$\hat{x}(n+1) = 0.8\hat{x}(n) + 0.3[y(n) - \hat{x}(n)] \quad (\text{题 4.14.3})$$

注释 在一些文献 (例如 [32]) 中, 标量随机过程的 Kalman 滤波算法采用以下

形式:

$$g_1(n) = K(n, n-1)[K(n, n-1) + \sigma_v^2]^{-1} = \frac{K(n, n-1)}{K(n, n-1) + 1} \quad (\text{题 4.14.4a})$$

$$P(n) = K(n, n-1) - g_1(n)K(n, n-1) = [1 - g_1(n)]K(n, n-1) \quad (\text{题 4.14.4b})$$

$$\hat{x}(n+1) = F(n+1, n)\hat{x}(n) + g_1(n)[y(n) - F(n+1, n)\hat{x}(n)] \quad (\text{题 4.14.4c})$$

$$K(n+1, n) = F(n+1, n)P(n)F(n+1, n) + \sigma_w^2 \quad (\text{题 4.14.4d})$$

将式(题 4.14.4)与式(题 4.14.1)作一比较知,  $g_1(n) = F^{-1}(n+1, n)g(n)$ , 两种算法的惟一区别在于  $\hat{x}(n+1)$  的更新公式略有区别: 式(题 4.14.1c)的校正项为

$$g(n)[y(n) - \hat{x}(n)] = g(n)y(n) - g(n)\hat{x}(n)$$

而式(题 4.14.4c)的校正项为

$$g_1(n)[y(n) - F(n+1, n)\hat{x}(n)] = F^{-1}(n+1, n)g(n)y(n) - g(n)\hat{x}(n)$$

只有第一项不同。

当采用式(4.14.4)作为标量随机过程的 Kalman 滤波算法时, 本习题的计算结果为  $g_1(n) = 3.75$ ,  $n = 4, 5, \dots$ , 状态变量  $x(n)$  的 Kalman 一步预测估计的更新公式为

$$\hat{x}(n+1) = 0.8\hat{x}(n) + 3.75[y(n) - 0.8\hat{x}(n)] \quad (\text{题 4.14.5})$$

**题 4.15** 本题中, Kalman 滤波算法的各参数(矩阵)为

$$F(n+1, n) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$C(n) = 1$$

$$Q_1 = \sigma_1^2 I$$

$$Q_2 = \sigma_2^2 I$$

而初始值可取  $\hat{x}(1) = E\{x(1)\} = 0$  和  $K(1, 0) = E\{x(1)x^T(1)\} = I$ .

将这些值代入 4.1 节的算法 4.3, 得递推公式如下:

$$G(n) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} K(n, n-1) [K(n, n-1) + \sigma_2^2 I]^{-1} \quad (\text{题 4.15.1a})$$

$$\hat{x}_1(n+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \hat{x}_1(n) + G(n)[y(n) - \hat{x}_1(n)] \quad (\text{题 4.15.1b})$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{K}(n, n-1) - \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{G}(n) \mathbf{K}(n, n-1) \quad (\text{题 4.15.1c})$$

$$\mathbf{K}(n+1, n) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{P}(n) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix}^H + \sigma_1^2 \mathbf{I} \quad (\text{题 4.15.1d})$$

**题 4.16** <sup>[23]</sup> 为了推导状态方程, 我们根据图题 4.16 写出以下方程:

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \quad (\text{题 4.16.1a})$$

上式两边对时间  $t$  求一阶导数, 得

$$2r(t)\dot{r}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t)$$

或写作

$$\dot{r}(t) = \frac{x(t)}{r(t)}\dot{x}(t) + \frac{y(t)}{r(t)}\dot{y}(t) \quad (\text{题 4.16.1b})$$

为简便计, 下面将略去时间变量  $t$ .

从图中可以看出: 飞机至雷达的水平距离  $x = r \cos \theta$ , 飞机沿  $x$  方向的飞行速度  $\dot{x} = V$ , 沿  $y$  方向的飞行速度  $\dot{y} = 0$ . 将这些关系代入式 (题 4.16.1b) 后, 则有

$$\dot{r} = V \cos \theta \quad (\text{题 4.16.2})$$

求导后, 得

$$\ddot{r} = \dot{V} \cos \theta - V \dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{题 4.16.3})$$

对于方位角  $\theta$ , 显然有

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

对时间  $t$  求导后, 得

$$\dot{\theta} \sec^2 \theta = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2}$$

即有

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2 \sec^2 \theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2} \quad (\text{题 4.16.4})$$

由图题 4.16 的几何关系知  $y = r \sin \theta$ ,  $\dot{x} = V$  和  $\dot{y} = 0$ , 将这些关系代入式 (题 4.16.4) 后, 可将  $\dot{\theta}$  表示为

$$\dot{\theta} = -\frac{V}{r} \sin \theta \quad (\text{题 4.16.5})$$

求导后, 又有

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{\dot{V}r - V\dot{r}}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{V}{r} \dot{\theta} \cos \theta \quad (\text{题 4.16.6})$$

假定飞机作匀速飞行, 没有加速度, 即  $\dot{V} = 0$ . 于是, 若  $r$  和  $\theta$  在雷达的每个扫描周期 (约为  $1 \sim 10$  s) 内变化不太快的话, 我们就可认为  $\dot{r} = 0$  和  $\dot{\theta} = 0$ . 现在考虑在扫描周期  $T$  内  $\dot{r}$  和  $\dot{\theta}$  分别存在小的变化, 它们便可看作是随机扰动, 记作

$$\frac{d}{dt} \dot{r} = w_1(t) \quad (\text{题 4.16.7})$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\theta} = w_2(t) \quad (\text{题 4.16.8})$$

再加上  $\dot{r} = \frac{d}{dt} r$  和  $\dot{\theta} = \frac{d}{dt} \theta$  两个方程, 则有方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ w_1(t) \\ \dot{\theta} \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

或写成状态方程的标准形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_1(t) \\ 0 \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{题 4.16.9})$$

若用扫描周期  $T$  作采样间隔, 对  $r(t)$  和  $\theta(t)$  离散化, 则微分  $\frac{d}{dt} x(t)$  写成离散时间后, 即为差分  $x(k+1) - x(k)$ , 并且  $\frac{d}{dt} r = \dot{r}$  和  $\frac{d}{dt} \theta = \dot{\theta}$  的离散化结果分别为

$$r(k+1) - r(k) = T\dot{r}(k) \quad \text{或} \quad r(k+1) = r(k) + T\dot{r}(k) \quad (\text{题 4.16.10})$$

$$\theta(k+1) - \theta(k) = T\dot{\theta}(k) \quad \text{或} \quad \theta(k+1) = \theta(k) + T\dot{\theta}(k) \quad (\text{题 4.16.11})$$

定义离散时间的状态向量

$$\mathbf{x}(k) = [r(k), \dot{r}(k), \theta(k), \dot{\theta}(k)]^T \quad (\text{题 4.16.12})$$

和过程噪声向量

$$\mathbf{w}(k) = [0, w_1(k) \cdot T, 0, w_2(k) \cdot T]^T \quad (\text{题 4.16.13})$$

利用连续时间和离散时间之间的关系式 (题 4.16.10) 和 (题 4.16.11), 我们即可

将连续时间的状态方程式 (题 4.16.9) 改写为下面的离散时间的状态方程:

$$\begin{bmatrix} r(k+1) \\ \dot{r}(k+1) \\ \theta(k+1) \\ \dot{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(k) \\ \dot{r}(k) \\ \theta(k) \\ \dot{\theta}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_1(k)T \\ 0 \\ w_2(k)T \end{bmatrix} \quad (\text{题 4.16.14a})$$

或

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (\text{题 4.16.14b})$$

其中, 状态转移矩阵

$$\mathbf{F}(k+1, k) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{题 4.16.15})$$

由于雷达实际测量的参数是距离  $r$  和方位角  $\theta$ , 故雷达的观测方程为

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (\text{题 4.16.16})$$

式中

$$\mathbf{y}(k) = [r(k), \theta(k)]^T \quad (\text{题 4.16.17})$$

$$\mathbf{v}(k) = [v_1(k), v_2(k)]^T \quad (\text{题 4.16.18})$$

其中  $v_1(k)$  和  $v_2(k)$  分别是距离  $r(k)$  和方位角  $\theta(k)$  的观测噪声。

**答案:** 二维雷达跟踪的状态空间方程由状态方程

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

和观测方程

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$$

组成。

题 4.17 (1) 由题给条件, 可写出状态空间方程为

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{w}(n) \quad (\text{题 4.17.1})$$

$$y(n) = \boldsymbol{c}(n)\boldsymbol{x}(n) + v(n) \quad (\text{题 4.17.2})$$

式中

$$\boldsymbol{w}(n) = [w_1(n), \dots, w_p(n), w_{p+1}(n), \dots, w_{p+q}(n)]^T$$

为过程噪声向量.

由题意知, 过程噪声向量  $\boldsymbol{w}(n)$  和观测噪声  $v(n)$  的相关函数矩阵分别为

$$\boldsymbol{Q}_1(n) = \sigma_w^2 \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{Q}_2(n) = \sigma_v^2$$

(2) 将上述条件和已知值代入 4.1 节中的算法 4.3, 即可得到 Kalman 滤波算法为

$$\boldsymbol{G}(n) = \boldsymbol{K}(n, n-1)\boldsymbol{c}^T(n)[\boldsymbol{c}(n)\boldsymbol{K}(n, n-1)\boldsymbol{c}^T(n) + \sigma_v^2]^{-1} \quad (\text{题 4.17.3})$$

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = y(n) - \boldsymbol{c}(n)\hat{\boldsymbol{x}}_1(n) \quad (\text{题 4.17.4})$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_1(n+1) = \hat{\boldsymbol{x}}_1(n) + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{\alpha}(n) \quad (\text{题 4.17.5})$$

$$\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{K}(n, n-1) - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{c}(n)\boldsymbol{K}(n, n-1) \quad (\text{题 4.17.6})$$

$$\boldsymbol{K}(n+1, n) = \boldsymbol{P}(n) + \sigma_w^2 \boldsymbol{I} \quad (\text{题 4.17.7})$$

(3) 注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\boldsymbol{x}(1)\boldsymbol{x}^T(1)\} &= \mathbf{E}\{\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}^T(0)\} + \mathbf{E}\{\boldsymbol{w}(0)\boldsymbol{w}^T\} \\ &= 0 + \sigma_w^2 \boldsymbol{I} \\ &= \sigma_w^2 \boldsymbol{I} \end{aligned}$$

因此, 初始值取

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(1) &= \mathbf{E}\{\boldsymbol{x}(1)\} = 0 \\ \boldsymbol{K}(1, 0) &= \mathbf{E}\{\boldsymbol{x}(1)\boldsymbol{x}^T(1)\} = \sigma_w^2 \boldsymbol{I} \end{aligned}$$

答案:

(1) 时变 ARMA 过程的状态空间方程如式 (题 4.17.1) 和式 (题 4.17.2) 所示.

(2) 更新状态向量  $\boldsymbol{x}(n+1)$  的 Kalman 滤波公式由式 (题 4.17.3) ~ 式 (题 4.17.7) 给出。

(3) 初始值为  $\hat{\boldsymbol{x}}(1) = \mathbf{0}$  和  $\boldsymbol{K}(1,0) = \sigma_w^2 \boldsymbol{I}$ 。

**题 4.18** 已知状态方程为

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{e}_1 v(n) \quad (\text{题 4.18.1})$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

而观测方程为

$$y(n) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{x}(n) + w(n) \quad (\text{题 4.18.2})$$

令

$$\boldsymbol{x}_p(n) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{e}_1(n) \quad (\text{题 4.18.3})$$

表示信道状态向量  $\boldsymbol{x}$  的一步预测, 而

$$y_p(n) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{x}_p(n) \quad (\text{题 4.18.4})$$

代表  $y(n)$  的一步预测值, 则信道状态向量  $\boldsymbol{x}$  的 Kalman 滤波值为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n) = \boldsymbol{x}_p(n) + \boldsymbol{k}(n)[y(n) - y_p(n)] \quad (\text{题 4.18.5})$$

该式的涵义是: 信道状态向量  $\boldsymbol{x}$  在  $n$  时刻的 Kalman 滤波值等于  $\boldsymbol{x}$  在  $n$  时刻的一步预测值加校正项, 而校正项等于 Kalman 增益向量  $\boldsymbol{k}$  乘以观测数据的 Kalman 新息  $y(n) - y_p(n)$ 。

注意, 信道状态向量  $\boldsymbol{x}$  元素的估计值并不取 +1 或 -1。因此, 必须对  $n-D$  (其中  $0 \leq D \leq M-1$  表示发射时间与决策时间之间的延迟) 时刻发射的信号作出 +1 或 -1 的决策。具体方法是: 若信道状态向量  $\boldsymbol{x}$  第  $D$  个元素  $x_D$  的估计值  $\hat{x}_D$  大于或等于输入信号的均值  $p$ , 则判断发射的信号  $u(n-D)$  为 +1; 反之, 则判断发射信号  $u(n-D)$  为 -1, 即决策准则为

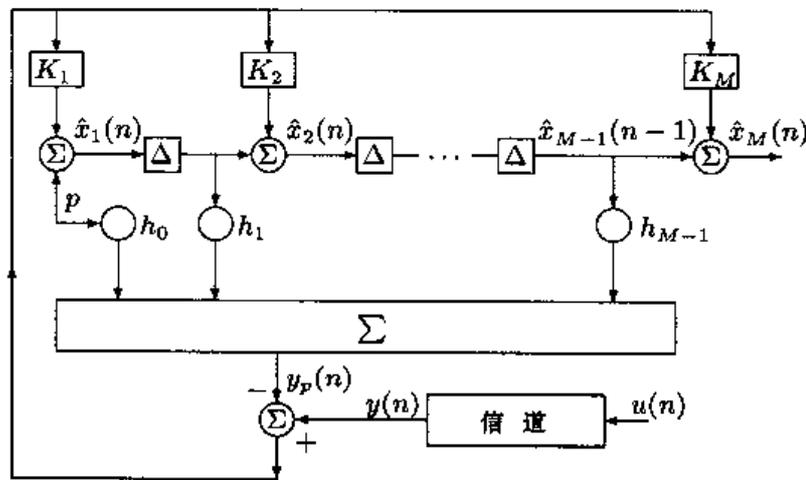
$$\begin{aligned} u(n-D) &= +1, & \text{若 } \hat{x}_D \geq p \\ u(n-D) &= -1, & \text{若 } \hat{x}_D < p \end{aligned}$$

由于 Kalman 滤波器的输出的决策结果直接给出发射信号的估计, 所以这一自适应滤波器称为 Kalman 均衡器。图题 4.18 画出了 Kalman 均衡器的结构图。

从图中可以看出, 信道状态向量第  $D$  个元素的 Kalman 滤波值为

$$\hat{x}_D(n) = \sum_{j=1}^D K_j [y(n+D-j) - y_p(n+D-j)] + p \quad (\text{题 4.18.6})$$

可见, 信道状态估值向量的元素服从 MA 模型, 其 MA 参数由 Kalman 增益向量  $k$  决定。



图题 4.18 Kalman 均衡器

一步预测  $y_p(n)$  由下式确定:

$$\sum_{k=1}^M h_k \hat{x}_k(n-1) = y_p(n) - h_0 p \quad (\text{题 4.18.7})$$

即信道状态估值向量的元素又服从 AR 模型, 其 AR 参数为信道冲激响应  $h_0, h_1, \dots, h_{M-1}$ 。

由于信道状态估值向量的元素即是 Kalman 均衡器的输出, 所以综合以上 AR 模型和 MA 模型知, Kalman 均衡器服从 ARMA 模型, 即它是一个无限冲激响应滤波器, 其系数由两组不同的参数决定:

- (1)  $M \times 1$  维信道冲激响应向量  $h$ ;
- (2)  $M \times 1$  维 Kalman 增益向量  $k$ 。

证毕。

**题 4.19** (1) 求  $J(n)$  相对于抽头权向量的梯度, 得

$$\begin{aligned}\nabla(n) &= \frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{w}^H(n)} = \frac{\partial |e(n)|^2}{\partial e(n)} \frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}^H(n)} + \alpha \frac{\partial \mathbf{w}^H(n) \mathbf{w}(n)}{\partial \mathbf{w}^H(n)} \\ &= e^*(n) [-\mathbf{u}(n)] + \alpha \mathbf{w}(n)\end{aligned}$$

由梯度下降法, 即有更新公式

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}(n+1) &= \hat{\mathbf{w}}(n) - \mu \hat{\nabla}(n) \\ &= \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu \mathbf{u}(n) e^*(n) - \mu \alpha \hat{\mathbf{w}}(n) \\ &= (1 - \mu \alpha) \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu \mathbf{u}(n) e^*(n)\end{aligned}$$

这就证明了式 (题 4.19.2)。

(2) 上式两边取数学期望, 并利用独立性理论, 已知

$$E\{\hat{\mathbf{w}}(n+1)\} = (1 - \mu \alpha) E\{\hat{\mathbf{w}}(n)\} + \mu E\{\mathbf{u}(n) [d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n) \mathbf{u}(n)]^*\} \quad (\text{题 4.19.4})$$

由于滤波器均值收敛意味着

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{w}}(n+1)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{w}}(n)\} \quad (\text{题 4.19.5})$$

所以对式 (题 4.19.4) 两边取极限, 并将式 (题 4.19.5) 代入后, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{w}}(n)\} = (1 - \mu \alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{w}}(n)\} + \mu [\mathbf{p} - \mathbf{R} \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{w}}(n)\}] \quad (\text{题 4.19.6})$$

式中  $\mathbf{R} = E\{\mathbf{u}(n) \mathbf{u}^H(n)\}$  是抽头输入向量  $\mathbf{u}(n)$  的相关矩阵, 而  $\mathbf{p} = E\{\mathbf{u}(n) d^*(n)\}$  是抽头输入向量  $\mathbf{u}(n)$  与期望响应  $d(n)$  之间的互相关向量。

对式 (题 4.19.6) 加以整理, 其结果为

$$(\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I}) \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{w}}(n)\} = \mathbf{p}$$

由此可获得  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{w}}(n)\}$  的解, 如式 (题 4.19.3) 所示。

这就完成了本习题的两部分证明。

**题 4.20** (1) 由题意, 多用户检测器  $\mathbf{c}_1$  的设计实际是一个带约束条件的最小输出能量问题:

$$\mathbf{c}_1 = \arg \min_{\mathbf{c}_1} E\{[\mathbf{c}_1^T \mathbf{y}(n)]^2\} \quad (\text{题 4.20.1})$$

约束条件为

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{U}_i \mathbf{w} \quad (\text{题 4.20.2})$$

式中  $E\{[c_1^T \mathbf{y}(n)]^2\}$  表示多用户检测器输出的能量。

由于相对于期望用户而言,  $\mathbf{s}_1$  代表了信号子空间,  $\mathbf{U}_i$  为干扰子空间, 所以它们之间存在正交关系, 即有  $\mathbf{s}_1^T \mathbf{U}_i = \mathbf{0}$ 。这表明, 约束条件式 (题 4.20.2) 表示的分解为正交分解。由梯度下降法, 我们有

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} E\{[c_1^T(n) \mathbf{y}(n)]^2\} \quad (\text{题 4.20.3})$$

式中  $\nabla_{\mathbf{w}} E\{[c_1^T(n) \mathbf{y}(n)]^2\}$  表示真实梯度, 即

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}} E\{[c_1^T(n) \mathbf{y}(n)]^2\} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^T(n)} E\{[c_1^T(n) \mathbf{y}(n)]^2\} \\ &= E \left\{ 2c_1^T(n) \mathbf{y}(n) \cdot \frac{\partial c_1^T(n) \mathbf{y}(n)}{\mathbf{w}^T(n)} \right\} \\ &= 2E\{[\mathbf{s}_1 + \mathbf{U}_i \mathbf{w}(n)]^T \mathbf{y}(n) \cdot \mathbf{U}_i^T \mathbf{y}(n)\} \end{aligned}$$

用瞬时值代替期望值, 并令  $\mathbf{z}(n) = [\mathbf{s}_1 + \mathbf{U}_i \mathbf{w}(n)]^T \mathbf{y}(n)$ , 即得瞬时梯度

$$\hat{\nabla}_{\mathbf{w}} = 2[\mathbf{s}_1 + \mathbf{U}_i \mathbf{w}(n)]^T \mathbf{y}(n) \mathbf{U}_i^T \mathbf{y}(n) = 2z(n) \mathbf{U}_i^T \mathbf{y}(n) \quad (\text{题 4.20.4})$$

于是, 与式 (题 4.20.3) 对应的 LMS 自适应算法为

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - 2\mu z(n) \mathbf{U}_i^T \mathbf{y}(n) \quad (\text{题 4.20.5})$$

而多用户检测器  $c_1$  的自适应更新公式为

$$c_1(n+1) = \mathbf{s}_1 + \mathbf{U}_i \mathbf{w}(n+1) \quad (\text{题 4.20.6})$$

式 (题 4.20.5) 和式 (题 4.20.6) 一起组成了多用户检测器的 LMS 自适应算法。

(2) 令  $K \times K$  矩阵

$$\mathbf{R}_y \stackrel{\text{def}}{=} E\{\mathbf{y}(n) \mathbf{y}^T(n)\} \quad (\text{题 4.20.7})$$

表示观测数据向量  $\mathbf{y}(n)$  的自相关矩阵, 其特征值分解为

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \quad (\text{题 4.20.8})$$

则矩阵  $\mathbf{U} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{U}_i]$  的列张成数据空间, 其中  $\mathbf{s}_1$  张成信号子空间, 而  $\mathbf{U}_i$  张成干扰子空间。事实上,  $\mathbf{P}_{\mathbf{s}_1} \mathbf{y}(n)$  表示观测数据向量  $\mathbf{y}(n)$  在信号子空间的投影, 因此,  $\mathbf{y}(n) - \mathbf{P}_{\mathbf{s}_1} \mathbf{y}(n)$  代表的是观测数据向量中的全部干扰部分。换言之, 干扰向量可表

示为

$$\begin{aligned} i(n) &= \mathbf{y}(n) - \mathbf{P}_{s_1} \mathbf{y}(n) \\ &= \mathbf{y}(n) - s_1 \langle s_1, s_1 \rangle^{-1} s_1^T \mathbf{y}(n) \\ &= \mathbf{y}(n) - s_1 s_1^T \mathbf{y}(n) \end{aligned}$$

式中使用了单位能量条件  $\langle s_1, s_1 \rangle = 1$ .

注意到标量  $s_1^T \mathbf{y}(n) = \mathbf{y}^T(n) s_1$ , 所以干扰向量可写为

$$i(n) = \mathbf{y}(n) - (\mathbf{y}^T(n) s_1) s_1 \quad (\text{题 4.20.9})$$

一旦干扰向量计算出后, 即可计算其样本自相关矩阵

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N i(n) i^T(n) \quad (\text{题 4.20.10})$$

注意  $K \times K$  维自相关矩阵  $\mathbf{R}_y$  是满秩的, 即其秩为  $K$ , 而  $\mathbf{R}_i$  的秩则为  $K-1$ , 因为干扰信号部分被去除了.

**答案:**

(1) 多用户检测器的 LMS 自适应算法由式 (题 4.20.5) 和式 (题 4.20.6) 构成.

(2) 干扰矩阵  $\mathbf{U}_i$  由自相关矩阵  $\mathbf{R}_i$  与  $K-1$  个最大特征值相对应的特征向量共同组成.

**题 4.21** 由数据矩阵的定义, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{1,k}(n) &= [z^{-1} \mathbf{x}(n), \dots, z^{-k} \mathbf{x}(n)]^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(n-1) & x(n-2) & \cdots & x(n-k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k^T \\ \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

此即式 (题 4.21.1).

将已证明的式 (题 4.21.1) 代入投影矩阵的定义公式, 得

$$\begin{aligned}
 P_{1,k}(n) &= \mathbf{X}_{1,k}(n) \langle \mathbf{X}_{1,k}(n), \mathbf{X}_{1,k}(n) \rangle^{-1} \mathbf{X}_{1,k}^T(n) \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k^T \\ \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k^T \\ \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k^T \\ \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix} \right\rangle^{-1} \times \\
 &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k^T \\ \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k^T \\ \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix} \langle \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1), \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1) \rangle^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k^T \\ \mathbf{X}_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^T \\ \mathbf{0}_{k-1} & P_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

这就证明了式 (题 4.21.2).

**题 4.22** 式 (题 4.22.1) 对  $n-1$  自然也成立, 即

$$P_{0,j-1}^\perp(n-1) z^{-j} \mathbf{x}(n-1) = e_j^b(n-1) \quad (\text{题 4.22.3})$$

为真. 注意到

$$z^{-j} \mathbf{x}(n-1) = z^{-j-1} \mathbf{x}(n) \quad (\text{题 4.22.4})$$

$$e_j^b(n-1) = z^{-1} e_j^b(n) \quad (\text{题 4.22.5})$$

又因为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{0,j-1}(n-1) &= [z^0 \mathbf{x}(n-1), \dots, z^{-j+1} \mathbf{x}(n-1)] \\
 &= [z^{-1} \mathbf{x}(n), \dots, z^{-j} \mathbf{x}(n)] \\
 &= \mathbf{X}_{1,j}(n)
 \end{aligned} \quad (\text{题 4.22.6})$$

所以

$$\begin{aligned}
 P_{0,j-1}^\perp(n-1) &= \mathbf{X}_{0,j-1}(n-1) \langle \mathbf{X}_{0,j-1}(n-1), \mathbf{X}_{0,j-1}(n-1) \rangle^{-1} \mathbf{X}_{0,j-1}^T(n-1) \\
 &= \mathbf{X}_{1,j}(n) \langle \mathbf{X}_{1,j}(n), \mathbf{X}_{1,j}(n) \rangle^{-1} \mathbf{X}_{1,j}^T(n) \\
 &= P_{1,j}(n)
 \end{aligned}$$

从而有

$$P_{0,j-1}^\perp(n-1) = P_{1,j}^\perp(n) \quad (\text{题 4.22.7})$$

将式 (题 4.22.4)、式 (题 4.22.5) 和式 (题 4.22.7) 一起代入式 (题 4.22.3), 得到式 (题 4.22.2)。证毕。

**题 4.23** 注意到  $z^{-k}\mathbf{v}(n) = [0, \dots, 0, v(1), \dots, v(n-k)]^T$ , 易得

(1) 数据向量

$$\mathbf{v}(2) = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(2) 向量

$$z^{-1}\mathbf{v}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$z^{-2}\mathbf{v}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) 向量

$$z^{-1}\mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ v(1) \\ v(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$z^{-2}\mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(4) 由于

$$\mathbf{u}(2) = z^{-1}\mathbf{v}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

故投影矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_u(2) &= \mathbf{u}(2)\langle \mathbf{u}(2), \mathbf{u}(2) \rangle^{-1} \mathbf{u}^T(2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} P_u(3) &= \mathbf{u}(3) \langle \mathbf{u}(3), \mathbf{u}(3) \rangle^{-1} \mathbf{u}^T(3) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(5) 由于用  $\mathbf{u}(n)$  一步前向预测  $\mathbf{v}(n)$ , 故  $P_{1,m}(n) = P_{1,1}(n) = P_u(n)$ , 且

$$\hat{\mathbf{v}}(n) = P_{1,1} \mathbf{v}(n) = P_u(n) \mathbf{v}(n)$$

故

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(2) &= P_u(2) \mathbf{v}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{v}}(3) &= P_u(3) \mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(6) 前向预测误差向量

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^f(2) &= \mathbf{v}(2) - \hat{\mathbf{v}}(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_1^f(3) &= \mathbf{v}(3) - \hat{\mathbf{v}}(3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1.2 \\ 2.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**答案:**

(1) 数据向量

$$\mathbf{v}(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(2) 向量

$$z^{-1} \mathbf{v}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad z^{-2} \mathbf{v}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) 向量

$$z^{-1}\mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z^{-2}\mathbf{v}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(4) 投影矩阵

$$\mathbf{P}_u(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_u(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(5)  $v(n)$  的一步前向预测为

$$\hat{v}(n) = \mathbf{P}_u(n)\mathbf{v}(n)$$

(6) 前向预测误差向量

$$\mathbf{e}_1^f(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1^f(3) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1.2 \\ 2.4 \end{bmatrix}$$

**题 4.24** 由递推公式

$$\langle z, \mathbf{P}_{U,u}^\perp \mathbf{y} \rangle = \langle z, \mathbf{P}_U^\perp \mathbf{y} \rangle - \langle z, \mathbf{P}_U^\perp \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{P}_U^\perp \mathbf{u}, \mathbf{P}_U^\perp \mathbf{u} \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \mathbf{P}_U^\perp \mathbf{y} \rangle \quad (\text{题 4.24.1})$$

(1) 在式 (题 4.24.1) 中令  $z = \mathbf{y} = \mathbf{x}(n)$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{X}_{1,m}(n)$  和  $\mathbf{u} = z^{-m-1}\mathbf{x}(n)$ , 则易知

$$\mathbf{P}_U^\perp \mathbf{y} = \mathbf{P}_{1,m}^\perp \mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{P}_U^\perp \mathbf{u} = \mathbf{P}_{1,m}^\perp z^{-m-1} \mathbf{x}(n)$$

利用正交投影矩阵的性质, 又可得到

$$\begin{aligned}
 \langle z, P_U^\perp u \rangle &= \langle x(n), P_{1,m}^\perp(n) z^{-m-1} x(n) \rangle \\
 &= \langle P_{1,m}^\perp(n) x(n), P_{1,m}^\perp(n) z^{-m-1} x(n) \rangle \\
 &= \langle P_{1,m}^\perp(n) x(n), z^{-1} P_{0,m-1}^\perp(n) z^{-m} x(n) \rangle \\
 &= \langle e_m^f(n), z^{-1} e_m^b(n) \rangle \\
 &= \Delta_{m+1}(n)
 \end{aligned} \tag{题 4.24.2a}$$

$$\begin{aligned}
 \langle P_U^\perp u, P_U^\perp u \rangle &= \langle P_{1,m}^\perp(n) z^{-m-1} x(n), P_{1,m}^\perp(n) z^{-m-1} x(n) \rangle \\
 &= \langle z^{-1} P_{0,m-1}^\perp(n) x(n), z^{-1} P_{0,m-1}^\perp(n) x(n) \rangle \\
 &= \langle z^{-1} e_m^b(n), z^{-1} e_m^b(n) \rangle \\
 &= \varepsilon_m^b(n-1)
 \end{aligned} \tag{题 4.24.2b}$$

$$\begin{aligned}
 \langle u, P_U^\perp y \rangle &= \langle z^{-m-1} x(n), P_{1,m}^\perp(n) x(n) \rangle \\
 &= \langle P_{1,m}^\perp(n) z^{-m-1} x(n), P_{1,m}^\perp(n) x(n) \rangle \\
 &= \langle z^{-1} e_m^b(n), e_m^f(n) \rangle \\
 &= \Delta_{m+1}(n)
 \end{aligned} \tag{题 4.24.2c}$$

将式(题 4.24.2)代入式(题 4.24.1), 即可直接得到前向预测残差的阶数和时间更新公式为

$$\varepsilon_{m+1}^f(n) = \varepsilon_m^f(n) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\varepsilon_m^b(n-1)}$$

(2) 在式(题 4.24.1)中令  $z = y = z^{-m-1} x(n)$ ,  $U = X_{1,m}(n)$  和  $u = x(n)$ , 则有

$$\begin{aligned}
 \langle z, P_U^\perp u \rangle &= \langle z^{-m-1} x(n), P_{1,m}^\perp(n) x(n) \rangle \\
 &= \Delta_{m+1}(n)
 \end{aligned} \tag{题 4.24.3a}$$

这里使用了式(题 4.24.2c)的结果。另一方面, 有

$$\begin{aligned}
 \langle P_U^\perp u, P_U^\perp u \rangle &= \langle P_{1,m}^\perp(n) x(n), P_{1,m}^\perp(n) x(n) \rangle \\
 &= \langle x(n), P_{1,m}^\perp(n) x(n) \rangle \\
 &= \varepsilon_m^f(n)
 \end{aligned} \tag{题 4.24.3b}$$

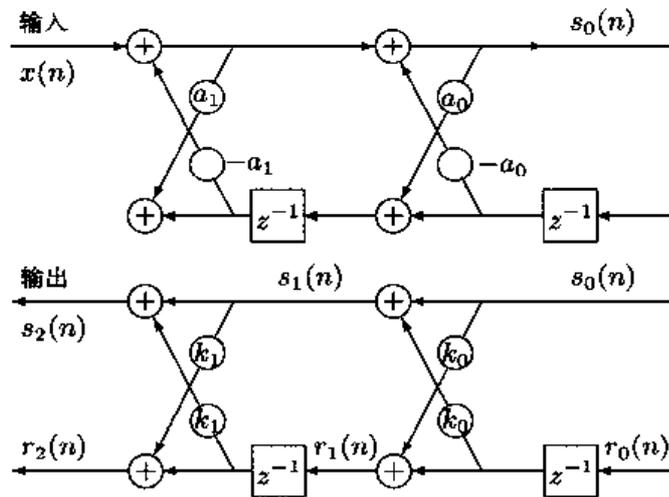
$$\begin{aligned}
 \langle u, P_U^\perp y \rangle &= \langle x(n), P_{1,m}^\perp(n) z^{-m-1} x(n) \rangle \\
 &= \Delta_{m+1}(n)
 \end{aligned} \tag{题 4.24.3c}$$

将式 (题 4.24.3) 代入式 (题 4.24.1), 并加以整理, 即得到

$$\varepsilon_{m+1}^b(n) = \varepsilon_m^b(n-1) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\varepsilon_m^f(n)}$$

这就完成了本题的两部分证明。

**题 4.25** 令格型 IIR 滤波器如图题 4.25 所示。



图题 4.25 格型 IIR 滤波器

图中, 整个格型 IIR 滤波器由两个格型滤波器级联而成。上面的格型滤波器  $H_1(z)$  的输入为  $x(n)$ , 输出为  $s_0(n)$ ; 而下面的格型滤波器  $H_2(z)$  的输入为  $s_0(n)$ , 输出为  $s_2(n)$ 。

由图题 4.25 容易写出格型滤波器  $H_1(z)$  和  $H_2(z)$  的输入—输出方程分别为

$$s_0(n) + a_0(1 + a_1)s_0(n-1) + a_1s_0(n-2) = x(n)$$

$$s_0(n) + k_0(1 + k_1)s_0(n-1) + k_1s_0(n-2) = s_2(n)$$

或写成  $Z$  变换形式为

$$[1 + a_0(1 + a_1)z^{-1} + a_1z^{-2}] S_0(z) = X(z)$$

$$[1 + k_0(1 + k_1)z^{-1} + k_1z^{-2}] S_0(z) = S_2(z)$$

因此, 两个格型滤波器的传递函数分别为

$$H_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_0(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_0(1 + a_1)z^{-1} + a_1z^{-2}} \quad (\text{题 4.25.1})$$

$$H_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_2(z)}{S_0(z)} = 1 + k_0(1 + k_1)z^{-1} + k_1z^{-2} \quad (\text{题 4.25.2})$$

由此得整个格型 IIR 滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned} H(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_2(z)}{X(z)} \\ &= \frac{S_2(z)}{S_0(z)} \frac{S_0(z)}{X(z)} \\ &= H_2(z) H_1(z) \\ &= \frac{1 + k_0(1 + k_1)z^{-1} + k_1z^{-2}}{1 + a_0(1 + a_1)z^{-1} + a_1z^{-2}} \end{aligned} \quad (\text{题 4.25.3})$$

将题给  $H(z)$  改写为

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.89z^{-1} + 0.89z^{-2}} \quad (\text{题 4.25.4})$$

比较式 (题 4.25.3) 和式 (题 4.25.4), 得到下列条件:

$$\begin{aligned} k_0(1 + k_1) &= 2, \quad k_1 = 1 \\ a_0(1 + a_1) &= -1.89, \quad a_1 = 0.89 \end{aligned}$$

解之, 得到格型 IIR 滤波器的参数如下:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= 1 \\ k_1 &= 1 \\ a_0 &= -1 \\ a_1 &= 0.89 \end{aligned} \right\} \quad (\text{题 4.25.5})$$

**答案:** 设计的格型 IIR 滤波器如图题 4.25 所示, 其参数为  $k_0 = 1$ ,  $k_1 = 1$  和  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 0.89$ .

**题 4.26** <sup>[52]</sup> 由观测方程式 (题 4.26.2) 知, 最优权向量  $w_{\text{opt1}}(n)$  在自适应更新过程中的估计误差为

$$e(n) = \tilde{y}(n) - \mathbf{d}^T(n) \hat{w}_{\text{opt1}}(n)$$

由此得

$$\begin{aligned}\xi(n) &= E\{e^2(n)\} \\ &= E\left\{\left[\tilde{y}(n) - \mathbf{d}^T(n)\hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)\right]^2\right\} \\ &= E\left\{\left[\mathbf{d}^T(n)(\mathbf{w}_{\text{opt}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)) + e_{\text{opt}}(n)\right]^2\right\}\end{aligned}\quad (\text{题 4.26.8})$$

由正交性原理知,  $E\{e_{\text{opt}}(n)[\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)]\} = 0$  或  $e_{\text{opt}}(n) \perp [\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)]$ 。利用这一结果, 即可将式 (题 6.26.8) 表示成

$$\begin{aligned}\xi(n) &= E\left\{[\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)]^T \mathbf{d}(n) \mathbf{d}^T(n) [\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)] + \xi_{\min}\right\} \\ &= E\left\{\|\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)\|^2 \|\mathbf{d}(n)\|^2\right\} + \xi_{\min}\end{aligned}\quad (\text{题 4.26.9})$$

它又可用矩阵的迹等价写作

$$\begin{aligned}\xi(n) &= \text{tr}\left\{E\left\{[\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)][\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)]^T\right\} \times\right. \\ &\quad \left.E\left\{\mathbf{d}(n)\mathbf{d}^T(n)\right\}\right\} + \xi_{\min}\end{aligned}\quad (\text{题 4.26.10})$$

由预测状态误差向量  $\varepsilon(n+1, n)$  的定义式 (题 4.26.3) 和预测状态误差相关矩阵  $\mathbf{K}(n, n-1)$  的定义式 (题 4.26.4) 知, 由于在平稳情况下  $\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n+1) = \mathbf{w}_{\text{opt1}}(n)$ , 其预测估计的更新很小, 故  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n+1) \approx \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)$ , 从而可以将式 (题 4.26.4) 的预测状态误差相关矩阵近似写作

$$\mathbf{K}(n+1, n) \approx E\left\{[\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)][\mathbf{w}_{\text{opt1}}(n) - \hat{\mathbf{w}}_{\text{opt1}}(n)]^T\right\}\quad (\text{题 4.26.11})$$

令

$$\mathbf{R}_d = E\left\{\mathbf{d}(n)\mathbf{d}^T(n)\right\}\quad (\text{题 4.26.12})$$

则其样本估计

$$\hat{\mathbf{R}}_d = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{d}(k)\mathbf{d}^T(k)\quad (\text{题 4.26.13})$$

将式 (题 4.26.11) 和式 (题 4.26.12) 代入式 (题 4.26.10), 则有

$$\xi(n) \approx \text{tr}\{\mathbf{K}(n+1, n)\mathbf{R}_d\} + \xi_{\min}\quad (\text{题 4.26.14})$$

注意到对于足够大的  $n$ , 有  $\hat{\mathbf{R}}_d \approx \mathbf{R}_d$ , 故题给式 (题 4.26.7) 可改写作

$$\mathbf{K}(n+1, n) = \xi_{\min} (\xi_{\min} \mathbf{I} + n\mathbf{R}_d)^{-1}\quad (\text{题 4.26.15})$$

将式 (题 4.26.15) 代入式 (题 4.26.14), 则有

$$\xi(n) \approx \text{tr} [\xi_{\min} (\xi_{\min} \mathbf{I} + n \mathbf{R}_d)^{-1} \mathbf{R}_d] + \xi_{\min} \quad (\text{题 4.26.16})$$

利用矩阵迹的性质知

$$\text{tr} [\xi_{\min} (\xi_{\min} \mathbf{I} + n \mathbf{R}_d)^{-1} \mathbf{R}_d] + \xi_{\min} \leq \text{tr} [\xi_{\min} n^{-1} \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{R}_d] + \xi_{\min} \quad (\text{题 4.26.17})$$

由式 (题 4.26.16) 和式 (题 4.26.17), 得

$$\xi(n) \leq \text{tr} [\xi_{\min} n^{-1} \mathbf{I}] + \xi_{\min} \quad (\text{题 4.26.18})$$

式中  $\mathbf{I}$  是一个  $N \times N$  的单位矩阵, 并且  $\text{tr}[\mathbf{I}] = N$ 。显然, 式 (题 4.26.18) 可简化为

$$\xi(n) \leq (1 + n^{-1} N) \xi_{\min} \quad (\text{题 4.26.19})$$

这正是本习题需要证明的不等式。证毕。



## 第 5 章 高阶统计分析

本章介绍非高斯信号的高阶统计分析与处理的理论、方法及应用。首先，引出矩、累积量和高阶谱等高阶统计量的定义，并分别总结它们的数学性质。然后，介绍基于高阶累积量的非最小相位系统的辨识、谐波恢复以及自适应滤波器的理论与方法。

### 5.1 主要理论与方法

#### 5.1.1 矩与累积量

##### 1. 单个随机变量的矩与累积量

首先有以下定义。

第一特征函数 (矩生成函数)

$$\Phi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} E\{e^{j\omega x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\omega x} dx \quad (5.1.1)$$

第二特征函数 (累积量生成函数)

$$\Psi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \Phi(\omega) \quad (5.1.2)$$

随机变量  $x$  的  $k$  阶矩

$$m_k = E\{x^k\} = (-j)^k \left. \frac{d^k \Phi(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = (-j)^k \Phi^{(k)}(0) \quad (5.1.3)$$

随机变量  $x$  的  $k$  阶累积量

$$c_k = (-j)^k \left. \frac{d^k \Psi(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = (-j)^k \Psi^{(k)}(0) \quad (5.1.4)$$

## 2. 多个随机变量的矩与累积量

### 第一联合特征函数

$$\begin{aligned}\Phi(\omega_1, \dots, \omega_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E \left\{ e^{j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_k x_k)} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_k) e^{j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_k x_k)} dx_1 \dots dx_k\end{aligned}$$

### 第二联合特征函数

$$\Psi(\omega_1, \dots, \omega_k) = \ln \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k) \quad (5.1.5)$$

### 联合矩

$$m_{1\dots k} \stackrel{\text{def}}{=} E\{x_1 \dots x_k\} = (-j)^k \left. \frac{\partial^k \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k)}{\partial \omega_1 \dots \partial \omega_k} \right|_{\omega_1 = \dots = \omega_k = 0} \quad (5.1.6)$$

### 联合累积量

$$c_{1\dots k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{cum}\{x_1, \dots, x_k\} = (-j)^k \left. \frac{\partial^k \ln \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k)}{\partial \omega_1 \dots \partial \omega_k} \right|_{\omega_1 = \dots = \omega_k = 0} \quad (5.1.7)$$

## 3. 随机过程 $\{x(n)\}$ 的矩与累积量

### $k$ 阶矩

$$m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = E\{x(n)x(n+\tau_1)\dots x(n+\tau_{k-1})\} \quad (5.1.8)$$

### 累积量

$$c_{mx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = \text{cum}\{x(n), x(n+\tau_1), \dots, x(n+\tau_{k-1})\} \quad (5.1.9)$$

## 4. 累积量与矩的关系

假定  $\{x(n)\}$  是均值为零的实信号, 则二、三、四阶累积量与矩之间的关系如下:

$$\begin{aligned}c_{2x}(\tau) &= E\{x(t)x(t+\tau)\} = R_x(\tau) \\ c_{3x}(\tau_1, \tau_2) &= E\{x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)\} = m_{3x}(\tau_1, \tau_2) \\ c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= E\{x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)x(t+\tau_3)\} - R_x(\tau_1)R_x(\tau_3-\tau_2) - \\ &\quad R_x(\tau_2)R_x(\tau_3-\tau_1) - R_x(\tau_3)R_x(\tau_2-\tau_1) \\ &= m_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - R_x(\tau_1)R_x(\tau_3-\tau_2) - \\ &\quad R_x(\tau_2)R_x(\tau_3-\tau_1) - R_x(\tau_3)R_x(\tau_2-\tau_1)\end{aligned}$$

这说明, 零均值随机过程的二、三阶累积量分别与二、三阶矩等价。这些公式给出了二、三、四阶样本累积量的计算公式。

### 5.1.2 矩与累积量的性质

性质 1 令  $\lambda_i$  为常数,  $x_i$  为随机变量, 其中  $i = 1, \dots, k$ , 则

$$\begin{aligned}\text{mom}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k) &= \prod_{i=1}^k \lambda_i \text{mom}(x_1, \dots, x_k) \\ \text{cum}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k) &= \prod_{i=1}^k \lambda_i \text{cum}(x_1, \dots, x_k)\end{aligned}$$

性质 2 矩和累积量关于它们的变元是对称的, 即

$$\begin{aligned}\text{mom}(x_1, \dots, x_k) &= \text{mom}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \\ \text{cum}(x_1, \dots, x_k) &= \text{cum}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\end{aligned}$$

其中  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  是  $(1, 2, \dots, k)$  的一个排列。

性质 3 矩和累积量相对其变元具有可加性, 即

$$\begin{aligned}&\text{mom}(x_1 + y_1, x_2, \dots, x_k) \\ &= \text{mom}(x_1, x_2, \dots, x_k) + \text{mom}(y_1, x_2, \dots, x_k) \\ &\text{cum}(x_1 + y_1, x_2, \dots, x_k) \\ &= \text{cum}(x_1, x_2, \dots, x_k) + \text{cum}(y_1, x_2, \dots, x_k)\end{aligned}$$

性质 4 若随机变量  $\{x_i\}$  和  $\{y_i\}$  统计独立, 则累积量具有“半不变性”, 即

$$\text{cum}(x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k) = \text{cum}(x_1, \dots, x_k) + \text{cum}(y_1, \dots, y_k) \quad (5.1.10)$$

但高阶矩一般没有半不变性, 即

$$\text{mom}(x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k) \neq \text{mom}(x_1, \dots, x_k) + \text{mom}(y_1, \dots, y_k) \quad (5.1.11)$$

性质 5 如果  $k$  个随机变量  $\{x_1, \dots, x_k\}$  的一个子集同其他部分独立, 则

$$\begin{aligned}\text{cum}(x_1, \dots, x_k) &= 0 \\ \text{mom}(x_1, \dots, x_k) &\neq 0\end{aligned}$$

性质 6 若  $\alpha$  为一常数, 则

$$\begin{aligned} \text{cum}(x_1 + \alpha, x_2, \dots, x_k) &= \text{cum}(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \text{mom}(x_1 + \alpha, x_2, \dots, x_k) &\neq \text{mom}(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

### 5.1.3 高阶谱

#### 1. 高阶矩谱

$$\begin{aligned} M_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \\ = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_{k-1} \tau_{k-1})} \end{aligned}$$

#### 2. 高阶累积量谱

$$\begin{aligned} S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \\ = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_{k-1} \tau_{k-1})} \end{aligned}$$

#### 3. 双谱

三阶累积量谱简称双谱 (意即二维频率的功率谱), 即

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3x}(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.1.12)$$

性质 1 双谱一般为复数, 即

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = |B_x(\omega_1, \omega_2)| e^{j\phi_B(\omega_1, \omega_2)} \quad (5.1.13)$$

式中  $|B_x(\omega_1, \omega_2)|$  和  $\phi_B(\omega_1, \omega_2)$  分别表示双谱的幅值和相位。

性质 2 双谱是双周期函数, 两个周期均为  $2\pi$ , 即

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = B_x(\omega_1 + 2\pi, \omega_2 + 2\pi) \quad (5.1.14)$$

性质 3 双谱具有以下对称性:

$$\begin{aligned} B_x(\omega_1, \omega_2) &= B_x(\omega_2, \omega_1) \\ &= B_x^*(-\omega_1, -\omega_2) = B_x^*(-\omega_2, -\omega_1) \\ &= B_x(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) = B_x(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) \\ &= B_x(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) = B_x(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) \end{aligned}$$

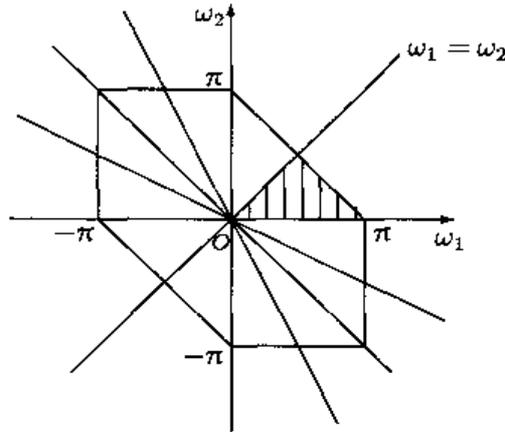


图 5.1.1 双谱的对称区域

#### 4. 双谱估计的直接法

步骤 1 将所给数据分成  $K$  段, 每段含  $M$  个观测样本, 记作  $x^{(k)}(0), x^{(k)}(1), \dots, x^{(k)}(M-1)$ , 其中  $k = 1, 2, \dots, K$ . 注意, 这里允许两段相邻数据之间有重叠.

步骤 2 计算离散 Fourier 变换 (DFT) 系数

$$X^{(k)}(\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x^{(k)}(n) e^{-j 2\pi n \lambda / M} \quad (5.1.15)$$

式中  $\lambda = 0, 1, \dots, M/2; k = 1, 2, \dots, K$ .

步骤 3 计算 DFT 系数的三重相关

$$\hat{b}_k(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\Delta_0^2} \sum_{i_1=-L_1}^{L_1} \sum_{i_2=-L_1}^{L_1} X^{(k)}(\lambda_1 + i_1) X^{(k)}(\lambda_2 + i_2) X^{(k)}(-\lambda_1 - \lambda_2 - i_1 - i_2)$$

$$k = 1, 2, \dots, K; 0 < \lambda_2 < \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2 < f_s/2$$

其中  $\Delta_0 = f_s/N_0$ , 而  $N_0$  和  $L_1$  应选择为满足  $M = (2L_1 + 1)N_0$  的值.

步骤 4 所给数据  $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$  的双谱估计由  $K$  段双谱估计的平均值给出, 即

$$\hat{B}_D(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{b}_k(\omega_1, \omega_2) \quad (5.1.16)$$

式中

$$\omega_1 = \frac{2\pi f_s}{N_0} \lambda_1, \quad \omega_2 = \frac{2\pi f_s}{N_0} \lambda_2 \quad (5.1.17)$$

#### 5. 双谱估计的间接法

步骤 1 将原  $N$  个数据分为  $K$  段, 每段含  $M$  个样本.

步骤 2 设  $x^{(k)}(0), x^{(k)}(1), \dots, x^{(k)}(M-1)$  为第  $k$  段数据, 计算各段的三阶累积量的估计值:

$$c^{(k)}(i, j) = \frac{1}{M} \sum_{n=-M_1}^{M_2} x^{(k)}(n)x^{(k)}(n+i)x^{(k)}(n+j), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.1.18)$$

式中  $M_1 = \max(0, -i, -j)$  和  $M_2 = \min(M-1, M-1-i, M-1-j)$ .

步骤 3 取所有段的三阶累积量的平均值作为整个观测数据组的三阶累积量估计, 即

$$\hat{c}(i, j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c^{(k)}(i, j) \quad (5.1.19)$$

步骤 4 计算双谱估计

$$\hat{B}_{IN}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=-L}^L \sum_{l=-L}^L \hat{c}(i, l)w(i, l)e^{-j(\omega_1 i + \omega_2 l)} \quad (5.1.20)$$

式中  $L < M-1$ , 而  $w(i, l)$  为二维滞后窗函数.

#### 6. 二维窗函数必须满足的条件

- (1)  $w(m, n) = w(n, m) = w(-m, n-m) = w(m-n, -n)$ ;
- (2)  $w(m, n) = 0$ , 若  $(m, n)$  位于累积量估计值  $\hat{c}_{3x}(m, n)$  的支持区以外;
- (3)  $w(0, 0) = 1$  (归一化条件);
- (4)  $W(\omega_1, \omega_2) \geq 0, \forall (\omega_1, \omega_2)$ .

#### 7. 三种二维窗函数的构造

##### 最优窗

$$d_{\text{opt}}(m) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{\pi m}{L} \right| \left( 1 - \frac{|m|}{L} \right) \cos \frac{\pi m}{L}, & |m| \leq L \\ 0, & |m| > L \end{cases} \quad (5.1.21)$$

##### Parzen 窗

$$d_{\text{Parzen}}(m) = \begin{cases} 1 - 6 \left( \frac{|m|}{L} \right)^2 + 6 \left( \frac{|m|}{L} \right)^3, & |m| \leq L/2 \\ 2 \left( 1 - \frac{|m|}{L} \right)^3, & L/2 < |m| \leq L \\ 0, & |m| > L \end{cases} \quad (5.1.22)$$

谱域均匀窗

$$W_{\text{uniform}}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3\Omega_0}, & |\omega| \leq \Omega_0 \\ 0, & |\omega| > \Omega_0 \end{cases} \quad (5.1.23)$$

式中,  $|\omega| = \max(|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_1 + \omega_2|)$ , 且  $\Omega_0 = a_0/L$ , 而  $a_0$  是一常数.

#### 5.1.4 亚高斯信号与超高斯信号

信号的斜度描述该信号偏离对称分布的程度, 峰度是信号偏离高斯分布的程度.

1. 斜度

$$S_x \stackrel{\text{def}}{=} E\{x^3(t)\} \quad (5.1.24)$$

2. 峰度

$$K_x \stackrel{\text{def}}{=} E\{x^4(t)\} - 3E^2\{x^2(t)\} \quad (5.1.25)$$

3. 归零化峰度

$$K_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E\{x^4(t)\}}{E^2\{x^2(t)\}} - 3 \quad (5.1.26)$$

基于归零化峰度的信号分类:

- (1) 峰度等于零的信号为高斯信号;
  - (2) 峰度小于零的信号为亚高斯信号;
  - (3) 峰度大于零的信号为超高斯信号.
4. 归一化峰度

$$K_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E\{x^4(t)\}}{E^2\{x^2(t)\}} \quad (5.1.27)$$

基于归一化峰度的信号分类:

- (1) 归一化峰度等于 3 的实信号为高斯信号;
- (2) 归一化峰度小于 3 的实信号为亚高斯信号;
- (3) 归一化峰度大于 3 的实信号为超高斯信号.

#### 5.1.5 Bartlett-Brillinger-Rosenblatt 公式 (BBR 公式)

1. 累积量的 BBR 公式

$$c_{2x}(\tau) = R_x(\tau) = \sigma_e^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+\tau) \quad (5.1.28)$$

$$c_{3x}(\tau_1, \tau_2) = \gamma_{3e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+\tau_1)h(i+\tau_2) \quad (5.1.29)$$

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+\tau_1)h(i+\tau_2)h(i+\tau_3) \quad (5.1.30)$$

## 2. 谱、双谱和三谱的 BBR 公式

$$P_x(\omega) = \sigma_e^2 H(\omega) H^*(\omega) = \sigma_e^2 |H(\omega)|^2 \quad (5.1.31)$$

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = \gamma_{3e} H(\omega_1) H(\omega_2) H(-\omega_1 - \omega_2) \quad (5.1.32)$$

$$T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \gamma_{3e} H(\omega_1) H(\omega_2) H(\omega_3) H(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \quad (5.1.33)$$

## 5.1.6 FIR 系统辨识

基于自相关函数 (R) 和累积量 (C) 估计 FIR 系统参数的方法称为 RC 方法。

## 1. RC 方法

(1) Giannakis-Mendel 算法<sup>[15]</sup>

使用相关函数和三阶累积量

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) R_x(m-i) = \varepsilon_3 \sum_{i=0}^q b(i) c_{3x}(m-i, m-i) \quad -q \leq m \leq 2q \quad (5.1.34)$$

式中  $\varepsilon_3 = \sigma_e^2 / \gamma_{3e}$ 。

使用相关函数和四阶累积量

$$\sum_{i=0}^q b^3(i) R_x(m-i) = \varepsilon_4 \sum_{i=0}^q b(i) c_{4x}(m-i, m-i) \quad -q \leq m \leq 2q \quad (5.1.35)$$

式中  $\varepsilon_4 = \sigma_e^2 / \gamma_{4e}$ 。

参数惟一可辨识性尚未解决。

(2) Tugnait 算法<sup>[43]</sup>

求解联立方程

$$\sum_{i=1}^q b^2(i) c_{3y}(m-i, m-i) - \sum_{i=0}^q [\varepsilon b^2(i)] R_y(m-i) = -c_{3y}(m, m) \quad -q \leq m \leq -1 \text{ 和 } q+1 \leq m \leq 2q$$

$$\sum_{i=1}^q c_{3y}(i-m, q) - [\varepsilon b(q)] R_y(m) = -c_{3y}(-m, q), \quad 1 \leq m \leq q$$

式中  $\varepsilon = \gamma_{3e} / \sigma_e^2$ 。

## (3) 组合累积量切片算法

任意累积量切片的线性组合

$$C_w(i) = w_2 c_{2x}(i) + \sum_{j=-q}^q w_3(j) c_{3x}(i, j) + \sum_{j=-q}^q \sum_{l=-q}^j w_4(j, l) c_{4x}(i, j, l) + \dots$$

都可以表示为  $b(i)$  和  $g_w(i)$  的互相关, 即

$$C_w(i) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n+i) g_w(n) \quad (5.1.36)$$

式中,  $g_w(n)$  为下列因果序列:

$$g_w(n) = w_2 b(n) + \sum_{j=-q}^q w_3(j) b(n; j) + \sum_{j=-q}^q \sum_{l=-q}^j w_4(j, l) b(n; j, l) + \dots \quad (5.1.37)$$

它可视为 MA 模型参数  $b(i)$  的加权系数.

式 (5.1.36) 的矩阵—向量形式为

$$c_w = S w \quad (5.1.38)$$

组合累积量切片算法 ( $w$  切片算法)<sup>[13]</sup>

步骤 1 求方程 (5.1.38) 的最小范数解

$$w = S^\dagger e \quad (5.1.39)$$

其中  $S^\dagger = S^T (S S^T)^{-1}$  是矩阵  $S$  的最小范数逆矩阵, 且  $e = [0, \dots, 0, 1]^T$ .步骤 2 计算 MA 参数  $b(i) = C_w(i)$  或

$$b = S w_m \quad (5.1.40)$$

与上面三种同时使用相关函数和累积量的方法相比, 累积量方法只使用高阶累积量估计 FIR 系统参数.

2. 累积量方法<sup>[49]</sup>

求解法方程

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{ky}^{k-1}(q, i - \tau) = c_{ky}(\tau, 0) c_{ky}^{k-3}(q, 0) c_{ky}(q, q), \quad \tau = -q, \dots, 0, \dots, q \quad (5.1.41)$$

或

$$\sum_{i=0}^q b^{k-1}(i)c_{ky}(q, i + \tau) = c_{ky}(\tau, 0)c_{ky}(q, q)/c_{ky}(q, 0)$$

$$\tau = -q, \dots, 0, \dots, q$$

### 3. MA 阶数确定 [48]

构造扩展阶的累积量矩阵

$$C_{MA,e} = \begin{bmatrix} c_{ky}(0,0) & c_{ky}(1,0) & \cdots & c_{ky}(q_e,0) \\ c_{ky}(1,0) & \cdots & c_{ky}(q_e,0) & \\ \vdots & \ddots & & \\ c_{ky}(q_e,0) & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.42)$$

式中  $q_e > q$ , 则矩阵  $C_{MA,e}$  的秩等于  $q+1$ .

MA 阶数确定方法 1: 利用 SVD 确定矩阵  $C_{MA,e}$  的有效秩.

MA 阶数确定方法 2:  $q$  是满足条件

$$c_{ky}^{m+1}(m, 0) \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.1.43)$$

的最大整数.

## 5.1.7 因果 ARMA 模型辨识

### 1. AR 参数估计与阶数确定

修正 Yule-Walker 方程

$$\sum_{i=0}^p a(i)c_{kx}(m-i, n) = 0, \quad m > q, \forall n \quad (5.1.44)$$

修正 Yule-Walker 方程

$$\sum_{i=0}^p a(i)c_{ky}(m-i, n) = 0, \quad m = q+1, q+2, \dots, q+p;$$

$$n = q-p, q-p+1, \dots, q$$

的最小二乘解惟一辨识 AR 参数.

若  $M_1 \geq q+1-p$ ,  $M_2 \geq p$ ,  $N_1 \leq q-p$  和  $N_2 \geq q$ , 则  $M_2(N_2 - N_1 + 1) \times M_2$  扩

展阶累积量矩阵

$$C_e = \begin{bmatrix} c_{kx}(M_1, N_1) & \cdots & c_{kx}(M_1 + M_2 - 1, N_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{kx}(M_1, N_2) & \cdots & c_{kx}(M_1 + M_2 - 1, N_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{kx}(M_1 + M_2, N_1) & \cdots & c_{kx}(M_1 + 2M_2 - 1, N_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{kx}(M_1 + M_2, N_2) & \cdots & c_{kx}(M_1 + 2M_2 - 1, N_2) \end{bmatrix} \quad (5.1.45)$$

的秩等于 AR 阶数  $p$ .

## 2. 基于累积量的 AR 参数估计的 SVD-TLS 算法

步骤 1 构造  $M_2(N_2 - N_1 + 1) \times M_2$  扩展阶样本累积量矩阵

$$C_e = \begin{bmatrix} \hat{c}_{kx}(M_1 + M_2 - 1, N_1) & \cdots & \hat{c}_{kx}(M_1, N_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{c}_{kx}(M_1 + M_2 - 1, N_2) & \cdots & \hat{c}_{kx}(M_1, N_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{c}_{kx}(M_1 + 2M_2 - 1, N_1) & \cdots & \hat{c}_{kx}(M_1 + M_2, N_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{c}_{kx}(M_1 + 2M_2 - 1, N_2) & \cdots & \hat{c}_{kx}(M_1 + M_2, N_2) \end{bmatrix} \quad (5.1.46)$$

并计算其奇异值分解  $C_e = U \Sigma V^T$ , 存储矩阵  $V$ .

步骤 2 确定矩阵  $C_e$  的有效秩, 它给出 AR 阶数估计  $p$ .

步骤 3 计算  $(p+1) \times (p+1)$  矩阵

$$S^{(p)} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{M_2-p} \sigma_j^2 \mathbf{v}_j^i (\mathbf{v}_j^i)^T \quad (5.1.47)$$

其中  $\mathbf{v}_j^i = [v(i, j), v(i+1, j), \cdots, v(i+p, j)]^T$ , 而  $v(i, j)$  是矩阵  $V$  的第  $i$  行、第  $j$  列元素。

步骤 4 求矩阵  $S^{(p)}$  的逆矩阵  $S^{-(p)}$ , AR 参数的总体最小二乘估计由下式给出:

$$\hat{a}(i) = S^{-(p)}(i+1, 1) / S^{-(p)}(1, 1) \quad (5.1.48)$$

其中  $S^{-(p)}(i, 1)$  是逆矩阵  $S^{-(p)}$  的第  $i$  行、第 1 列元素。

### 3. MA 参数估计与阶数确定

残差时间序列

$$\tilde{y}(n) = \sum_{i=0}^p a(i)x(n-i) + \sum_{i=0}^p a(i)v(n-i) = \sum_{j=0}^q b(j)e(n-j) + \tilde{v}(n) \quad (5.1.49)$$

#### 5.1.8 复谐波的累积量

对于一般的零均值复谐波过程, 其各阶累积量定义为

$$c_{2x}(\tau) = E\{x(n), x^*(n-\tau)\} \quad (5.1.50)$$

$$c_{3x}(m_1, m_2) \equiv 0 \quad (5.1.51)$$

$$c_{4x}(m_1, m_2, m_3) = \text{cum}[x^*(n), x^*(n+m_1), x(n+m_2), x(n+m_3)] \quad (5.1.52)$$

##### 1. 二次相位耦合的谐波过程

若谐波过程  $x(n) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e^{j(\omega_i n + \phi_i)}$  满足条件  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$  和  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , 则称此谐波过程是二次相位耦合过程。

二次相位耦合谐波过程的三阶累积量定义为

$$c_{3x}(\tau_1, \tau_2) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cum}[x^*(n), x(n+\tau_1), x(n+\tau_2)] \quad (5.1.53)$$

上述定义给出非零的累积量

$$c_{3x}(\tau_1, \tau_2) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^* [e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} + e^{j(\omega_2 \tau_1 + \omega_1 \tau_2)}] \quad (5.1.54)$$

而其他定义  $\text{cum}[x(n), x(n+m_1), x(n+m_2)]$  和  $\text{cum}[x^*(n), x^*(n+m_1), x(n+m_2)]$  等则恒等于零。

对式 (5.1.54) 进行二维 Fourier 变换, 易知二次相位耦合谐波过程的双谱为

$$B_x(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^* [\delta(\lambda_1 - \omega_1, \lambda_2 - \omega_2) + \delta(\lambda_1 - \omega_2, \lambda_2 - \omega_1)] \quad (5.1.55)$$

式中

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.1.56)$$

为二维  $\delta$  函数。

式 (5.1.55) 表明, 双谱  $B_x(\lambda_1, \lambda_2)$  在频率  $(\omega_1, \omega_2)$  和  $(\omega_2, \omega_1)$  两处有冲激值, 而在其他频率处恒等于零。这是二次相位耦合谐波过程的重要性质, 利用它可以检验一个谐波过程是否为二次相位耦合过程。

## 2. 三次相位耦合的谐波过程

若谐波过程  $x(n) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e^{j(\omega_i n + \phi_i)}$  满足条件  $\phi_4 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$  和  $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ , 则称此谐波过程是三次相位耦合过程。

对于三次相位耦合谐波过程, 公式 (5.1.52) 将给出恒等于零的四阶累积量。这时, 必须采用下面的四阶累积量定义:

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cum}[x^*(n), x(n + \tau_1), x(n + \tau_2), x(n + \tau_3)] \quad (5.1.57)$$

根据式 (5.1.57), 可以求出三次相位耦合谐波过程的四阶累积量为

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4^* \left[ e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} + e^{j(\omega_2 \tau_1 + \omega_1 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} + e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_3 \tau_2 + \omega_2 \tau_3)} + e^{j(\omega_2 \tau_1 + \omega_3 \tau_2 + \omega_1 \tau_3)} + e^{j(\omega_3 \tau_1 + \omega_1 \tau_2 + \omega_2 \tau_3)} + e^{j(\omega_3 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_1 \tau_3)} \right] \quad (5.1.58)$$

将上式做三维 Fourier 变换后, 得到三次相位耦合谐波过程的三谱为

$$T_x(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4^* [\delta(\lambda_1 - \omega_1, \lambda_2 - \omega_2, \lambda_3 - \omega_3) + \delta(\lambda_1 - \omega_2, \lambda_2 - \omega_1, \lambda_3 - \omega_3) + \delta(\lambda_1 - \omega_1, \lambda_2 - \omega_3, \lambda_3 - \omega_2) + \delta(\lambda_1 - \omega_2, \lambda_2 - \omega_3, \lambda_3 - \omega_1) + \delta(\lambda_1 - \omega_3, \lambda_2 - \omega_1, \lambda_3 - \omega_2) + \delta(\lambda_1 - \omega_3, \lambda_2 - \omega_2, \lambda_3 - \omega_1)] \quad (5.1.59)$$

即三谱在频率  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  及其排列处各有冲激值。这一重要性质可以用来检验一谐波过程是否为三次相位耦合过程。

上面的结果表明, 复谐波过程的累积量不是惟一定义的, 应该根据不同的场合使用不同的累积量定义。后面的讨论将假定谐波过程不是相位耦合的过程。

### 5.1.9 有色噪声中的谐波恢复

考察复谐波过程

$$x(n) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{-j(\omega_i n + \phi_i)} \quad (5.1.60)$$

式中  $\phi_i$  是在  $[-\pi, \pi]$  内均匀分布且相互独立的随机变量, 则其自相关函数和四阶累

积量分别由 [40]

$$R_x(\tau) = \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^2 e^{j\omega_k \tau} \quad (5.1.61)$$

和

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = - \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^4 e^{j\omega_k(-\tau_1+\tau_2+\tau_3)} \quad (5.1.62)$$

给出。

对于实值谐波信号

$$x(n) = \sum_{k=1}^p \alpha_k \cos(\omega_k n + \phi_k) \quad (5.1.63)$$

式中  $\phi_k$  为独立的均匀分布  $U[-\pi, \pi)$ , 且  $\alpha_k > 0$ , 则  $x(n)$  的自相关函数和四阶累积量分别为

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \alpha_k^2 \cos(\omega_k \tau) \quad (5.1.64)$$

和

$$\begin{aligned} & c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ &= -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^p \alpha_k^4 [\cos(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \cos(\tau_2 - \tau_3 - \tau_1) + \cos(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] \end{aligned} \quad (5.1.65)$$

命题 式 (5.1.52) 描述的复值谐波过程  $x(n)$  的四阶累积量的对角切片  $c_{4x}(\tau) = c_{4x}(\tau, \tau, \tau)$  同另一复值谐波过程

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^2 e^{j(\omega_k n + \phi_k)} \quad (5.1.66)$$

的自相关函数相等 (只是相差一个负号), 而式 (5.1.63) 定义的实值谐波信号  $x(n)$  的四阶累积量的对角切片则与实值谐波信号

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=1}^p \alpha_k^2 \cos(\omega_k n + \phi_k) \quad (5.1.67)$$

的自相关函数等价 (只是相差一个固定的比例因子  $-3/4$ )。

### 1. 复谐波信号的修正 Yule-Walker(MYW) 方程

$$\sum_{i=0}^p \alpha(i) c_{4x}(m-i) = 0, \quad m > p \quad (5.1.68)$$

特征多项式

$$1 + a(1)z^{-1} + \cdots + a(p)z^{-p} = 0 \quad (5.1.69)$$

的根给出复谐波过程的频率估计。

2. 实谐波信号的 MYW 方程

$$\sum_{i=0}^{2p} a(i)c_{4x}(m-i) = 0, \quad m > 2p \quad (5.1.70)$$

特征多项式

$$1 + a(1)z^{-1} + \cdots + a(2p)z^{-2p} = 0 \quad (5.1.71)$$

的根给出实谐波过程的频率估计。

3. 算法 5.1.1 非高斯噪声中谐波恢复的混合方法<sup>[50]</sup>

步骤 1 利用 SVD-TLS 算法及观测过程  $y(n)$  的三阶累积量  $c_{3y}(\tau_1, \tau_2)$  估计非高斯 ARMA 噪声的 AR 阶数  $n_b$  和 AR 参数  $b(1), b(2), \cdots, b(n_b)$ 。

步骤 2 使用估计的 AR 参数  $b(1), b(2), \cdots, b(n_b)$  对观测数据  $y(n)$  进行滤波, 得到

$$\hat{y}(n) = B(q)y(n) \quad (5.1.72)$$

步骤 3 构造

$$\hat{R}_e = \begin{bmatrix} \hat{R}_{\hat{y}}(q_e + 1) & \hat{R}_{\hat{y}}(q_e) & \cdots & \hat{R}_{\hat{y}}(q_e - p_e + 1) \\ \hat{R}_{\hat{y}}(q_e + 2) & \hat{R}_{\hat{y}}(q_e + 1) & \cdots & \hat{R}_{\hat{y}}(q_e - p_e + 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{R}_{\hat{y}}(q_e + L) & \hat{R}_{\hat{y}}(q_e + L - 1) & \cdots & \hat{R}_{\hat{y}}(q_e - p_e + L) \end{bmatrix} \quad (5.1.73)$$

并取  $p_e \geq 2p$  和  $q_e \geq p_e + n_d$ , 以确定样本自相关矩阵  $\hat{R}_e$  的有效秩  $2p$ , 并使用 SVD-TLS 算法估计谐波过程  $x(n)$  的 AR 参数  $a(1), a(2), \cdots, a(2p)$ 。

步骤 4 求特征多项式  $A(z) = 1 + a(1)z^{-1} + \cdots + a(2p)z^{-2p} = 0$  的根  $z_i$ , 并用下式求谐波信号的频率 (只取正频率):

$$\omega_i = \frac{1}{2\pi} \arctan[\text{Im}(z_i)/\text{Re}(z_i)] \quad (5.1.74)$$

4. 算法 5.1.2 预滤波 ESPRIT 算法<sup>[51]</sup>

步骤 1 (累积量估计) 由观测值  $y(1), y(2), \cdots, y(N)$  估计三阶累积量  $c_{3y}(\tau_1, \tau_2)$ 。

步骤 2 (噪声过程的 AR 部分建模) 用 SVD-TLS 算法及三阶累积量  $c_{3y}(\tau_1, \tau_2)$  估计非高斯 ARMA 噪声的 AR 阶数  $n_b$  和 AR 参数  $b(1), b(2), \cdots, b(n_b)$ 。

步骤 3 (预滤波) 使用估计的 AR 参数  $b(1), b(2), \dots, b(n_b)$  和式 (5.1.72) 对观测数据  $y(n)$  进行滤波, 得到被滤波的观测过程  $\tilde{y}(n)$ .

步骤 4 (互协方差矩阵构造) 估计被滤波过程的自相关函数  $R_{\tilde{y}}(\tau)$ , 并构造互协方差矩阵

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}, \tilde{y}_1} = \begin{bmatrix} R_{\tilde{y}}(m+n_d) & R_{\tilde{y}}(m+n_d+1) & \cdots & R_{\tilde{y}}(2m+n_d-1) \\ R_{\tilde{y}}(m+n_d-1) & R_{\tilde{y}}(m+n_d) & \cdots & R_{\tilde{y}}(2m+n_d-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\tilde{y}}(n_d+1) & R_{\tilde{y}}(n_d+2) & \cdots & R_{\tilde{y}}(n_d+m) \end{bmatrix} \quad (5.1.75)$$

和

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}, \tilde{y}_2} = \begin{bmatrix} R_{\tilde{y}}(m+n_d+1) & R_{\tilde{y}}(m+n_d+2) & \cdots & R_{\tilde{y}}(2m+n_d) \\ R_{\tilde{y}}(m+n_d) & R_{\tilde{y}}(m+n_d+1) & \cdots & R_{\tilde{y}}(2m+n_d-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\tilde{y}}(n_d+2) & R_{\tilde{y}}(n_d+3) & \cdots & R_{\tilde{y}}(n_d+m+1) \end{bmatrix} \quad (5.1.76)$$

步骤 5 (执行 TLS-ESPRIT 算法) 计算  $\mathbf{R}_{\tilde{y}, \tilde{y}_1}$  的奇异值分解  $\mathbf{R}_{\tilde{y}, \tilde{y}_1} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$ , 确定其有效秩, 给出谐波个数  $d$  的估计, 与  $d$  个大奇异值对应的左、右奇异矩阵和奇异值矩阵分别为  $\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1$  和  $\mathbf{\Sigma}_1$ . 然后, 计算矩阵束  $\{\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{U}_1^H \mathbf{R}_{\tilde{y}, \tilde{y}_2} \mathbf{V}_1\}$  的  $d$  个非零广义特征值  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d$ . 谐波频率由

$$\omega_i = \frac{1}{2\pi} \arctan[\text{Im}(\gamma_i)/\text{Re}(\gamma_i)], \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (5.1.77)$$

给定.

### 5.1.10 基于高阶累积量的自适应滤波

#### 1. 基于三阶累积量的 RLS 自适应算法

使用加权误差平方和作为代价函数, 即

$$J_3 = \sum_{k=1}^n s_x(k) \left[ x(k) - \sum_{i=1}^m w_i x(k-i) \right]^2 \quad (5.1.78)$$

$$= \sum_{k=1}^n s_x(k) [x(k) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k)]^2 \quad (5.1.79)$$

式中

$$s_x(k) = \sum_{m=-M}^M \beta(m)x(k-m) \quad (5.1.80)$$

$$\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T \quad (5.1.81)$$

且  $\beta(m)$  为一窗函数.

使加权误差平方和最小的最优滤波器为 Wiener 滤波器, 即

$$\boldsymbol{w}(n) = \boldsymbol{C}^{-1}(n)\boldsymbol{c}(n) \quad (5.1.82)$$

式中

$$\boldsymbol{C}(n) = \lambda\boldsymbol{C}(n-1) + s_x(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n) \quad (5.1.83)$$

$$\boldsymbol{c}(n) = \lambda\boldsymbol{c}(n-1) + s_x(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n) \quad (5.1.84)$$

对式 (5.1.83) 应用矩阵求逆引理, 即可得到 RLS 算法如下<sup>[9]</sup>.

算法 5.1.3 基于三阶累积量的 RLS 自适应算法  
初始化

$$\boldsymbol{P}(N_0) = \boldsymbol{C}^{-1}(N_0)$$

更新  $k = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$

$$s_x(n) = \sum_{i=-M}^M \beta(i)x(n+i)$$

$$\boldsymbol{K}(n) = \frac{s_x(n)\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{x}(n)}{\lambda + s_x(n)\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{x}(n)}$$

$$\boldsymbol{a}(n) = \boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{w}(n-1)$$

$$\boldsymbol{w}(n) = \boldsymbol{w}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{a}(n)$$

$$\boldsymbol{P}(n) = \lambda^{-1}\boldsymbol{P}(n-1) - \lambda^{-1}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}(n-1)$$

2. 超定的辅助变量自适应算法

考虑超定方程

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r} \quad (5.1.85)$$

辅助变量方法的基本思想是引入一辅助变量矩阵  $\boldsymbol{Z}$ , 将原矩阵  $\boldsymbol{M}$  和向量  $\boldsymbol{r}$  分

别变成

$$M = Z^T X \quad (5.1.86)$$

$$r = Z^T y \quad (5.1.87)$$

式中,  $X$  和  $y$  分别为适当选择的数据矩阵和数据向量, 而  $Z$  称为辅助变量矩阵, 其选择原则是: 使  $M = Z^T X$  和  $r = Z^T y$  理论上能够对噪声免疫。这样一来, 原超定方程的最小二乘解即变成

$$w = (X^T Z Z^T X)^{-1} X^T Z Z^T y \quad (5.1.88)$$

这就是辅助变量方法的解。

求解超定的辅助变量方程 (5.1.88) 的自适应算法如下 [14]。

算法 5.1.4 超定递推辅助变量 (ORIV) 算法

初始化

$$S(0) = \mu [I_{2q+1} \ ; \ 0] \quad (2q+1) \times (3q+1) \text{ 矩阵}$$

$$c(0) = 0 \quad (3q+1) \times 1 \text{ 向量}$$

$$P(0) = \mu^{-2} I_{2q+1} \quad (2q+1) \times (2q+1) \text{ 矩阵}$$

$$w(0) = 0 \quad (2q+1) \times 1 \text{ 向量}$$

循环  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$z(k+1) = [x(k+1), x(k+2), \dots, x(k-3q+1)]^T \quad (3q+1) \times 1 \text{ 向量}$$

$$y(k+1) = [x^2(k-q+1), \dots, x^2(k-2q+1) \ ; \ x(k-q), \dots, x(k-2q+1)]^T \quad (2q+1) \times 1 \text{ 向量}$$

$$v(k+1) = S(k)z(k+1) \quad (2q+1) \times 1 \text{ 向量}$$

$$S(k+1) = \lambda S(k) + y(k+1)z^T(k+1) \quad (2q+1) \times (3q+1) \text{ 矩阵}$$

$$A(k+1) = [v(k+1) \ ; \ y(k+1)] \quad (2q+1) \times 2 \text{ 矩阵}$$

$$B(k+1) = \begin{bmatrix} -z^T(k+1)z(k+1) & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ 矩阵}$$

$$K(k+1) = P(k)A(k+1)[B(k+1) + A^T(k+1)P(k)A(k+1)]^{-1} \quad (2q+1) \times 2 \text{ 矩阵}$$

$$P(k+1) = \lambda^{-2}[P(k) - K(k+1)A^T(k+1)P(k)] \quad (2q+1) \times (2q+1) \text{ 矩阵}$$

$$u(k+1) = \begin{bmatrix} z^T(k+1)c(k) \\ x(k-q+1) \end{bmatrix} \quad 2 \times 1 \text{ 向量}$$

$$c(k+1) = \lambda c(k) + z(k+1)x(k-q+1) \quad (3q+1) \times 1 \text{ 向量}$$

$$w(k+1) = w(k) + K(k+1)[u(k+1) - A^T(k+1)w(k)] \quad (2q+1) \times 1 \text{ 向量}$$

### 5.1.11 时延估计

#### 1. 广义互相关方法

考查两个空间分离的传感器，它们的测量数据  $x(n)$  和  $y(n)$  满足下列方程：

$$x(n) = s(n) + w_1(n) \quad (5.1.89)$$

$$y(n) = s(n - D) + w_2(n) \quad (5.1.90)$$

式中  $s(n)$  为实信号， $s(n - D)$  表示  $s(n)$  的时延信号，其中时间移位为  $D$ ，可能还包括幅值因子  $\alpha$ ；而  $w_1(n)$  和  $w_2(n)$  分别是两个传感器的观测噪声，它们相互统计独立，并且与信号  $s(n)$  不相关。时延估计问题的提法是：利用观测数据  $x(n)$  和  $y(n)$  (其中  $n = 1, 2, \dots, N$ ) 估计时延参数  $D$ 。

本质上，时延估计就是寻求两个信号的最大相似性发生的时间差（滞后）。在信号处理中，“寻求二者之间的相似性”可以译为“求它们之间的互相关函数”。

考查  $x(n)$  与  $y(n)$  之间的互相关函数

$$R_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{x(n)y(n + \tau)\} \quad (5.1.91)$$

$$= E\{[s(n) + w_1(n)][s(n + \tau - D) + w_2(n + \tau)]\} \quad (5.1.92)$$

$$= R_{ss}(\tau - D) \quad (5.1.93)$$

式中  $R_{ss}(\tau) = E\{s(n)s(n + \tau)\}$  是信号  $s(n)$  的自相关函数。由于自相关函数具有性质  $R_{ss}(\tau) \leq R_{ss}(0)$ ，所以互相关函数  $R_{xy}(\tau) = R_{ss}(\tau - D)$  在  $\tau = D$  处取最大值。换句话说，互相关函数取最大值时的滞后  $\tau$  即给出时延  $D$  的估计。

下面是几种基于高阶统计量的时延估计方法。

#### 2. 非参数化双谱方法 1 [36],[37]

函数

$$T_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_1(\omega_1, \omega_2) e^{-j\omega_1\tau} d\omega_1 d\omega_2 \quad (5.1.94)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1(D-\tau)} d\omega_1 \quad (5.1.95)$$

在  $\tau = D$  处取峰值，式中

$$I_1(\omega_1, \omega_2) = e^{j\omega_1 D} \quad (5.1.96)$$

#### 3. 非参数化双谱方法 2 [29]

函数

$$\begin{aligned} T_2(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_2(\omega_1, \omega_2) e^{-j\omega_1\tau} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1(D-\tau)} d\omega_1 \end{aligned} \quad (5.1.97)$$

在  $\tau = D$  处取峰值, 式中

$$I_2(\omega_1, \omega_2) = e^{j\omega_1 D} \quad (5.1.98)$$

#### 4. 互倒双谱方法<sup>[30]</sup>

函数

$$D(\omega_1, \omega_2) = \frac{\mathcal{F}_2[m c_{xyz}(m, n)]}{\mathcal{F}_2[c_{xyx}(m, n)]} - \frac{\mathcal{F}_2[m c_{3x}(m, n)]}{\mathcal{F}_2[c_{3x}(m, n)]} \quad (5.1.99)$$

的峰值给出时延参数  $D$  的估计, 式中

$$\mathcal{F}_2[m c_{xyx}(m, n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m c_{xyx}(m, n) e^{-j(\omega_1 m + \omega_2 n)} dm dn \quad (5.1.100)$$

$$\mathcal{F}_2[m c_{3x}(m, n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m c_{3x}(m, n) e^{-j(\omega_1 m + \omega_2 n)} dm dn \quad (5.1.101)$$

#### 5. 四阶统计量方法<sup>[44]</sup>

定义四阶统计量代价函数

$$\hat{J}_4(D) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x(n-D) - y(n)]^4 - 3 \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x(n-D) - y(n)]^2 \right)^2 \quad (5.1.102)$$

计算峰度

$$\hat{\gamma}_{4s} = \frac{1}{2}(A_x + A_y) \quad (5.1.103)$$

其中

$$A_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^4(n) - 3 \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^2(n) \right]^2 \quad (5.1.104)$$

$$A_y = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y^4(n) - 3 \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y^2(n) \right]^2 \quad (5.1.105)$$

- (1) 若信号  $s(n)$  的峰度  $\gamma_{4s}$  大于零, 则时延参数  $D_0$  是使  $J_4(D)$  最小化的解;
- (2) 若峰度  $\gamma_{4s}$  小于零, 则  $D_0$  是使  $J_4(D)$  最大化的解。

### 5.1.12 双谱用于信号分类

令  $c_{3x}(\tau_1, \tau_2)$  和  $B(\omega_1, \omega_2)$  分别为信号  $\{x(n)\}$  的三阶累积量和双谱。

#### 1. 径向积分双谱的相位<sup>[4]</sup>

$$\text{PRIB}(a) = \arctan \left[ \frac{I_i(a)}{I_r(a)} \right] \quad (5.1.106)$$

式中

$$I(a) = I_i(a) + j I_r(a) = \int_0^{1/(1+a)} B(\omega_1, a\omega_1) d\omega_1 \quad (5.1.107)$$

#### 2. 径向积分双谱

$$\text{RIB}(a) = I(a) = \int_0^{1/(1+a)} B(\omega_1, a\omega_1) d\omega_1 \quad (5.1.108)$$

#### 3. 轴向积分双谱<sup>[46]</sup>

$$\text{AIB}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c_{3x}(0, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.1.109)$$

#### 4. 圆周积分双谱<sup>[24]</sup>

$$\text{CIB}(a) = \int B_p(a, \theta) d\theta \quad (5.1.110)$$

式中  $B_p(a, \theta)$  是双谱  $B(\omega_1, \omega_2)$  的极坐标表示, 即  $B_p(a, \theta) = B(\omega_1, \omega_2)$ , 其中  $\omega_1 = a \cos \theta$  和  $\omega_2 = a \sin \theta$ 。

#### 加权积分双谱

$$\text{WCIB}(a) = \int w(\theta) B_p(a, \theta) d\theta \quad (5.1.111)$$

式中  $w(\theta)$  取很小的值, 若  $\theta \approx k\pi/2$ ,  $k$  为整数。

#### 5. 选择双谱<sup>[52]</sup> 第 $i$ 类和第 $j$ 类信号之间的 Fisher 可分离度定义为

$$m^{(i,j)}(\omega) = \frac{\sum_{l=i,j} \left\{ \text{mean}_k \left( B_k^{(l)}(\omega) \right) - \text{mean}_l \left[ \text{mean}_k \left( B_k^{(l)}(\omega) \right) \right] \right\}^2}{\sum_{l=i,j} \text{var}_k \left( B_k^{(l)}(\omega) \right)}, \quad i \neq j \quad (5.1.112)$$

式中,  $\text{mean}_k(B_k^{(l)}(\omega))$  和  $\text{var}_k(B_k^{(l)}(\omega))$  分别代表第  $l$  类信号在频率  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  处的所有样本双谱的平均值和方差, 而  $\text{mean}_l[\text{mean}_k(B_k^{(l)}(\omega))]$  表示所有类型的信号在频率  $\omega$  的样本双谱的总体中心。

选择具有  $Q$  个最强 Fisher 类可分离度的频率集合  $\{\omega(h), h = 1, 2, \dots, Q\}$  作为特征频率。中心频率称为在双频率平面的选择频率。与它们相对应的双谱则称为选择双谱。

## 5.2 习 题

**题 5.1** 令  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $n$  个独立的高斯随机变量, 它们的均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ , 即对于  $i = 1, 2, \dots, n$  有

$$\begin{aligned} E\{x_i\} &= \mu \\ \text{var}(x_i) &= E\{[x_i - \mu]^2\} = \sigma^2 \end{aligned}$$

令

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$$

试求样本均值  $\bar{x}$  的第一特征函数 (矩生成函数) 和概率密度分布。

**题 5.2** 令  $x$  是一高斯随机向量, 其均值 (向量) 为  $v$  和协方差矩阵为  $R$ . 证明  $x$  的矩生成函数为

$$\Phi(x) = \exp\left(j\omega^T v - \frac{1}{2}\omega^T R\omega\right)$$

**题 5.3** 若有限能量信号  $x(n)$  的  $k$  阶矩定义为

$$m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+\tau_1)\cdots x(n+\tau_{k-1})$$

一序列由  $x(n) = a^n u(n)$  给出, 其中  $-1 < a < 1$ , 且  $u(n)$  是一单位阶跃函数. 试求  $x(n)$  的矩  $m_{1x}$ ,  $m_{2x}(\tau)$ ,  $m_{3x}(\tau_1, \tau_2)$  和  $m_{4x}(\tau, \tau, \tau)$ .

**题 5.4** 标量随机变量  $x$  的  $k$  阶累积量  $c_{kx}$  定义为  $k \times 1$  向量  $[x, \dots, x]^T$  的累积量. 证明

$$c_{kx} = (-j)^k \left. \frac{d^k \Psi_x(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0}$$

式中  $\Psi_x(\omega)$  是标量随机变量  $x$  的累积量生成函数.

**题 5.5** 令  $x$  具有平移的指数分布  $f(x) = e^{-(x+1)}, x \geq -1$  ( $x$  平移  $-1$  是为了使  $x$  的均值等于零). 试求  $c_{kx} = \text{cum}(x, \dots, x)$ .

**题 5.6** 令  $x$  的概率密度函数为  $f(x) = 0.5e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$ . 求  $c_{kx}, k \geq 2$ .

**题 5.7** 令  $x$  是  $m$  个具有零均值和单位方差的独立同分布高斯随机变量平方之和, 则  $x$  的分布称为具有  $m$  个自由度的  $\chi^2$  分布, 记作  $\chi_m^2$ . 求该随机变量  $x$  的  $k$  阶累积量  $c_{kx}$ .

**题 5.8** 已知  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  是两个统计独立的高斯随机过程, 并且

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

令

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

试证明  $\{z(t)\}$  是一高斯随机过程. 这一结论表明: 任何两个统计独立的高斯随机过程之和仍为高斯随机过程.

**题 5.9** 令  $\{e(n)\}$  是一非高斯平稳过程, 并假定  $\{e(n)\}$  通过一冲激响应为  $\{h_i\}$  的线性时不变稳定系统, 产生的输出序列为  $\{y(n)\}$ . 试利用累积量定义建立以下关系:

- (1) 用  $\{e(n)\}$  的累积量表示  $\{y(n)\}$  的累积量;
- (2) 用  $\{e(n)\}$  的多谱和冲激响应系数  $\{h_i\}$  表示  $\{y(n)\}$  的多谱.

**题 5.10**  $z(n) = x(n)\cos(\omega_c n) + y(n)\sin(\omega_c n)$ , 其中  $x(n)$  和  $y(n)$  为相互独立的平稳过程, 并且  $E\{x(n)\} = E\{y(n)\} = 0$ ,  $c_{2x}(\tau) = E\{x(n)x(n+\tau)\} = c_{2y}(\tau)$  和  $c_{3x}(\tau_1, \tau_2) = E\{x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)\} = c_{3y}(\tau_1, \tau_2)$ . 试问  $z(n)$  是平稳随机过程吗?

**题 5.11** (1) 证明三阶累积量的对称性:

$$c_{3y}(m, n) = c_{3y}(-m, n-m) = c_{3y}(m-n, -n)$$

(2) 证明双谱的对称性:

$$B(\omega_1, \omega_2) = B^*(-\omega_2, -\omega_1) = B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2)$$

**题 5.12** 已知一线性系统的冲激响应  $\{h_i\}$  满足绝对可求和条件, 即

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| < \infty$$

试证明: 由独立同分布过程  $\{e(n)\}$  激励该线性系统产生的线性过程的多谱存在, 并连续.

**题 5.13** <sup>[32]</sup> 令  $H(e^{j\omega})$  满足条件:  $H(e^{j\omega}) \neq 0, \forall \omega$ , 并且  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |ih_i| < \infty$ . 假定激励的独立同分布过程的  $k$  阶累积量不等于零, 其中  $k > 2$ . 证明  $H(e^{j\omega})$  可以从  $k$  阶谱  $S(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})$  得到, 至多相差一个未知的复常数尺度因子  $Ae^{j\omega m}$ , 其中  $A$  是一个实数 (正或负), 而  $m$  为整数.

**题 5.14** 证明多谱公式

$$S_{kz}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = \gamma_{ke} H(\omega_1) \cdots H(\omega_{k-1}) H(-\omega_1 - \dots - \omega_{k-1})$$

**题 5.15** 假定  $H(e^{j\omega}) \neq 0, \forall \omega$ , 并且  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |ih_i| < \infty$ , 证明  $H(e^{j\omega})$  的相位  $\phi(\omega)$  是相对于  $\omega$  连续可导的.

**题 5.16** 令  $\{y(n)\}$  是一非高斯 MA( $q$ ) 过程, 其激励过程  $\gamma_{3e} \neq 0$ . 求  $c_{3y}(\tau_1, \tau_2) \neq 0$  的  $\tau_1, \tau_2$  值的范围, 并在  $(\tau_1, \tau_2)$  平面上画出  $\tau_1, \tau_2$  的支撑区.

**题 5.17** 令卷积  $\tilde{x}_i = x_i * s_i$  表示用  $x_i$  激励冲激响应为  $s_i$  的线性时不变系统的输出, 其中  $x_i$  为一独立同分布过程. 证明以下关系式:

$$E\{|\tilde{x}_i|^2\} = E\{|x_i|^2\} \sum_j |s_j|^2 \quad (\text{题 5.17.1})$$

和

$$K(\tilde{x}_i) = K(x_i) \sum_j |s_j|^4 \quad (\text{题 5.17.2})$$

式中  $K(x_i)$  是  $x_i$  的峰度, 且

$$K(x_i) = E\{|x_i|^4\} - 2E^2\{|x_i|^2\} - |E\{x_i^2\}|^2 \quad (\text{题 5.17.3})$$

**题 5.18** 令  $x$  表示一各时刻取值为独立同分布的随机过程, 而  $\tilde{x} = x * h_j$  是  $x$  与线性时不变系统冲激响应  $\{h_j\}$  的卷积. 证明: 若  $E\{|\tilde{x}|^2\} = E\{|x|^2\}$ , 则以下关系式成立:

$$(1) |K(\tilde{x})| \leq |K(x)|;$$

(2)  $|K(\tilde{x})| = |K(x)|$  当且仅当  $s = [s_1, s_2, \dots]^T$  是一个只有一个非零元素 (其幅度为 1) 的向量.

**题 5.19** 考虑一 MA(1) 过程

$$x(n) = w(n) - w(n-1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中  $\{w(n)\}$  是独立同分布随机过程, 且  $E\{e(n)\} = 0$ ,  $E\{w^2(n)\} = 1$  和  $E\{w^3(n)\} = 1$ . 求  $\{x(n)\}$  的功率谱和双谱.

**题 5.20** 令

$$P_{1x}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_{4x}(\tau, 0, 0)e^{-j\omega\tau}$$

表示  $\{x(n)\}$  的特殊四阶累积量的功率谱. 考虑复谐波过程

$$x(n) = \alpha e^{j\omega_0 n}$$

式中  $\omega_0$  为常数;  $\alpha$  是一实的随机变量, 且  $E\{\alpha\} = 0$ ,  $E\{\alpha^2\} = Q$ ,  $E\{\alpha^3\} = 0$  和  $E\{\alpha^4\} = \mu$ . 证明

$$P_{1x}(\omega) = \frac{\gamma}{Q} S_x(\omega)$$

式中  $\gamma = \mu - 3Q^2$ , 而  $S_x(\omega)$  是  $\{x(n)\}$  的功率谱.

**题 5.21** 一阶 FIR 系统的冲激响应为

$$h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$$

令  $\{x(n)\}$  是使用独立同分布过程  $\{e(n)\}$  激励该 FIR 系统得到的输出序列, 其中  $E\{e(n)\} = 0$ ,  $E\{e^2(n)\} = \sigma_e^2$  和  $\gamma_{3e} = E\{e^3(n)\} \neq 0$ . 证明  $\{x(n)\}$  的双谱的特殊切片  $S_{3x}(\omega, 0)$  与功率谱  $S_x(\omega)$  之间存在下列关系:

$$S_{3x}(\omega, 0) = \frac{\gamma_{3e}}{\sigma_e^2} H(0) S_x(\omega)$$

式中  $H(0)$  是 FIR 系统频率传递函数  $H(\omega)$  在零频率的值.

**题 5.22** 考虑实值谐波信号

$$x(n) = \sum_{k=1}^p A_k \cos(\omega_k n + \phi_k)$$

式中  $\phi_k$  为独立的均匀分布  $U[-\pi, \pi)$ , 且  $A_k > 0$ , 证明  $x(n)$  的四阶累积量为

$$\begin{aligned} & c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^p \alpha_k^4 \{ \cos[\omega(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] + \cos[\omega(\tau_2 - \tau_3 - \tau_1)] + \\ & \quad \cos[\omega(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] \} \end{aligned}$$

**题 5.23** 令

$$s(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)e(n-i)$$

为信号, 其中  $\{e(n)\}$  为零均值的独立同分布过程, 且  $\gamma_{4e} \neq 0$ , 而

$$x(n) = s(n) + w_1(n)$$

$$y(n) = s(n-D) + w_2(n)$$

分别为观测过程, 其中  $\{w_1(n)\}$  和  $\{w_2(n)\}$  为高斯噪声, 它们相互统计独立. 定义准则函数

$$J_1(d) = \frac{|\text{cum}\{x(n-d), x(n-d), y(n), y(n)\}|}{\sqrt{|\text{CUM}_4\{x(n)\}||\text{CUM}_4\{y(n)\}|}}$$

式中  $\text{CUM}_4\{x(n)\} = \text{cum}\{x(n), x(n), x(n), x(n)\}$ . 证明下列结果成立:

(1)  $0 \leq J_1(d) \leq 1, \forall d$ ;

(2)  $J_1(d) = 1$  当且仅当  $d = D$ . 准则  $J_1(d)$  给出了时延估计的 Tugnait 方法 1 [45].

**题 5.24** 信号  $s(n)$  和观测过程  $x(n), y(n)$  同题 5.20, 并且  $w_1(n)$  和  $w_2(n)$  均为高斯有色噪声. 定义准则函数

$$J_2(d) = \frac{|\text{CUM}_4\{x(n-d) + y(n)\}|}{16\sqrt{|\text{CUM}_4\{x(n)\}||\text{CUM}_4\{y(n)\}|}}$$

式中  $\text{CUM}_4\{x(n)\} = \text{cum}\{x(n), x(n), x(n), x(n)\}$ . 证明下列结果成立:

(1)  $0 \leq J_2(d) \leq 1, \forall d$ ;

(2)  $J_2(d) = 1$  当且仅当  $d = D$ . 准则  $J_2(d)$  给出了时延估计的 Tugnait 方法 2 [45].

**题 5.25** 令  $g(x_1, x_2)$  是  $x_1$  和  $x_2$  的任意函数, 它是关于  $x_1$  和  $x_2$  连续可微分的. 若  $x_1$  和  $x_2$  均为高斯随机变量, 并且  $E\{x_i\} = 0$  和  $\text{var}(x_i) = E\{x_i^2\} = \sigma_i^2$ , 其中  $i = 1, 2$ . 假定  $x_1$  和  $x_2$  的第一特征函数为

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \exp \left[ -\frac{1}{2}(\sigma_1^2 \omega_1^2 + 2\mu \omega_1 \omega_2 + \sigma_2^2 \omega_2^2) \right]$$

式中

$$\mu = E\{x_1 x_2\}$$

证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \mathbf{E}\{g(x_1, x_2)\}}{\partial \mu^n} &= \mathbf{E} \left\{ \frac{\partial^{2n} g(x_1, x_2)}{\partial^n x_1 \partial^n x_2} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) \frac{\partial^{2n} f(x_1, x_2)}{\partial^n x_1 \partial^n x_2} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

这一结果称为 Price 定理 [28].

**题 5.26** 令  $R_x(\tau)$ ,  $c_{3x}(\tau, m)$  和  $B(\omega_1, \omega_2)$  分别是非高斯信号  $x(n)$  的相关函数、三阶累积量和双谱, 证明

$$R_x(\tau) = \alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3x}(\tau, m)$$

式中  $\alpha = \sigma_e^2 / [\gamma_{3e} H(0)]$ , 且  $\sigma_e^2$  和  $\gamma_{3e}$  分别是产生非高斯信号  $x(n)$  的线性系统  $H(z)$  的独立同分布非高斯白噪声  $e(n)$  的方差和三阶累积量.

### 5.3 习题解答

题 5.1 样本均值  $\bar{x}$  的数学期望和方差分别为

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{x}} &= E\{\bar{x}\} = \frac{1}{n} E\left\{\sum_{i=1}^n x_i\right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{x_i\} = \frac{1}{n} \cdot n\mu \\ &= \mu\end{aligned}\quad (\text{题 5.1.1})$$

和

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}}^2 &= \text{var}(\bar{x}) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}\quad (\text{题 5.1.2})$$

注意到  $x_i$  是具有零均值和方差为  $\sigma^2$  的高斯随机变量, 我们可以求出样本均值的特征函数如下:

$$\begin{aligned}\Phi_{\bar{x}}(\omega) &= E\{e^{j\bar{x}\omega}\} = E\left\{\exp\left(j\omega\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\} \\ &= E\left\{e^{j\frac{\omega}{n}(x_1+\dots+x_n)}\right\} = E\{e^{j\frac{\omega}{n}x_1} \dots e^{j\frac{\omega}{n}x_n}\} \\ &= \prod_{i=1}^n E\{e^{j\frac{\omega}{n}x_i}\} = \prod_{i=1}^n E\{e^{j\omega'x_i}\}\end{aligned}\quad (\text{题 5.1.3})$$

式中  $\omega' = \omega/n$ .

由于  $x_i$  的概率密度函数为

$$f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

而  $E\{e^{j\omega'x_i}\}$  是随机变量  $x_i$  的特征函数  $\Phi_{x_i}(\omega')$ , 故可得到

$$\begin{aligned}\Phi_{x_i}(\omega') &= E\{e^{j\omega'x_i}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_i)e^{j\omega'x_i}dx_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\omega'x_i - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx_i \\ &= \exp\left(j\omega'\mu - \frac{\omega'^2\sigma^2}{2}\right)\end{aligned}\quad (\text{题 5.1.4})$$

将式 (题 5.1.4) 代入式 (题 5.1.3), 并作变量代换  $\omega' = \omega/n$ , 立即有

$$\begin{aligned}\Phi_X(\omega) &= \prod_{i=1}^n \exp\left(j\omega\frac{\mu}{n} - \frac{\omega^2\sigma^2}{2n^2}\right) \\ &= \exp\left(j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2n}\right)\end{aligned}\quad (\text{题 5.1.5})$$

由于高斯随机变量  $y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  的特征函数为

$$\Phi_y(\omega) = \exp\left(j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right)\quad (\text{题 5.1.6})$$

比较式 (题 5.1.5) 与式 (题 5.1.6) 立即可得出结论: 样本均值  $\bar{x}$  的特征函数就是一随机变量的特征函数, 并且  $\bar{x}$  是一个均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2/n$  的高斯随机变量, 即样本均值  $\bar{x}$  的概率密度分布为

$$f_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2(\sigma^2/n)}\right]\quad (\text{题 5.1.7})$$

**答案:** 样本均值  $\bar{x}$  的概率密度分布由式 (题 5.1.7) 给出。

**题 5.2** 首先求均值为  $\mu$ 、方差为  $\sigma^2$  的单个高斯随机变量  $x$  的第一特征函数 (即矩生成函数)。由于  $x$  的概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

故  $x$  的第一特征函数为

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= E\{e^{j\omega x}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + j\omega x\right] dx\end{aligned}\quad (\text{题 5.2.1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \left(\frac{\mu}{\sigma^2} + j\omega\right)x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right] dx\quad (\text{题 5.2.2})$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$$

中, 令

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2\sigma^2} \\ B &= \frac{\mu}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}j\omega \\ C &= \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\end{aligned}$$

则式 (题 5.2.2) 的积分为

$$\Phi(\omega) = \exp\left(j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right)\quad (\text{题 5.2.3})$$

另一方面, 高斯随机向量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  的概率密度函数可表示为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{v})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{v})\right]\quad (\text{题 5.2.4})$$

式中  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{R}$  分别是高斯随机向量  $\mathbf{x}$  的均值向量和相关矩阵, 而  $|\mathbf{R}|$  和  $\mathbf{R}^{-1}$  分别代表相关矩阵  $\mathbf{R}$  的行列式和逆矩阵.

令频率向量  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$ , 则高斯随机向量  $\mathbf{x}$  的第一特征函数即矩生成函数为

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{j\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x}\end{aligned}$$

根据  $f(x)$  和  $f(\mathbf{x})$  之间的类比关系, 不难将单个随机变量  $x$  的第一特征函数推广为随机向量  $\mathbf{x}$  的第一特征函数, 即有

$$\Phi(\mathbf{x}) = \exp\left(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{v} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}\right) \quad (\text{题 5.2.5})$$

证毕.

**题 5.3**  $x(n)$  的各阶矩分别如下.

(1) 由题意及  $x(n) = a^n u(n)$ , 可求得

$$\begin{aligned} m_{1x} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \\ &= 1 + a + a^2 + \dots \\ &= \frac{1}{1-a} \quad (\text{均值}) \end{aligned} \quad (\text{题 5.3.1})$$

这里利用了等比级数的求和公式, 因为公比  $|a| < 1$ .

(2) 由于自相关函数为滞后  $\tau$  的偶函数, 所以

$$\begin{aligned} m_{2x}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+\tau) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)a^{n+\tau} u(n+\tau) \\ &= a^{|\tau|} + a^{2+|\tau|} + a^{4+|\tau|} + \dots \\ &= \frac{a^{|\tau|}}{1-a^2} \quad (\text{自相关函数}) \end{aligned} \quad (\text{题 5.3.2})$$

注意  $R_x(0) = m_{2x}(0) = 1/(1-a^2)$  是信号  $x(n)$  的总能量.

(3) 类似地, 我们有

$$\begin{aligned} m_{3x}(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)a^{n+\tau_1} u(n+\tau_1)a^{n+\tau_2} u(n+\tau_2) \end{aligned} \quad (\text{题 5.3.3})$$

情况 1: 若  $\tau_1 > 0$  和  $\tau_2 > 0$ , 则式 (题 5.3.3) 为

$$\begin{aligned} m_{3x}(\tau_1, \tau_2) &= a^{\tau_1+\tau_2} + a^{3+\tau_1+\tau_2} + a^{6+\tau_1+\tau_2} + \dots \\ &= \frac{a^{(\tau_1+\tau_2)}}{1-a^3}, \quad \tau_1 > 0, \tau_2 > 0 \end{aligned} \quad (\text{题 5.3.4})$$

情况 2: 在其他情况下, 当  $n \geq -\min(\tau_1, \tau_2)$  时,  $u(n)u(n+\tau_1)u(n+\tau_2) = 1$ , 故式 (题 5.3.3) 变成

$$\begin{aligned} m_{3x}(\tau_1, \tau_2) &= a^{(\tau_1+\tau_2)-3\min(\tau_1, \tau_2)}(1+a^3+a^6+\dots) \\ &= \frac{a^{(\tau_1+\tau_2)}}{1-a^3} a^{-3\min(\tau_1, \tau_2)} \end{aligned} \quad (\text{题 5.3.5})$$

式 (题 5.3.4) 和式 (题 5.3.5) 可以合并写作

$$m_{3x}(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \frac{a^{(\tau_1+\tau_2)}}{1-a^3}, & \tau_1 > 0, \tau_2 > 0 \\ \frac{a^{(\tau_1+\tau_2)}}{1-a^3} a^{-3\min(\tau_1, \tau_2)}, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 5.3.6})$$

(4) 考查特殊切片  $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ , 四阶矩为

$$\begin{aligned} m_{4x}(\tau, \tau, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^3(n+\tau) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{4n+3\tau} u(n)u^3(n+\tau) \end{aligned} \quad (\text{题 5.3.7})$$

情况 1: 若  $\tau < 0$ , 则  $n \geq |\tau|$  时  $u(n+\tau) = 1$ . 此时, 式 (题 5.3.7) 为

$$\begin{aligned} m_{4x}(\tau, \tau, \tau) &= a^{|\tau|} + a^{4+|\tau|} + a^{8+|\tau|} + \dots \\ &= \frac{a^{|\tau|}}{1-a^4}, \quad \tau < 0 \end{aligned} \quad (\text{题 5.3.8})$$

情况 2: 若  $\tau \geq 0$ , 则式 (题 5.3.7) 变作

$$\begin{aligned} m_{4x}(\tau, \tau, \tau) &= a^{3\tau} + a^{4+3\tau} + a^{8+3\tau} + \dots \\ &= \frac{a^{3\tau}}{1-a^4}, \quad \tau \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{题 5.3.9})$$

综合式 (题 5.3.8) 和式 (题 5.3.9), 得

$$m_{4x}(\tau, \tau, \tau) = \begin{cases} \frac{a^{|\tau|}}{1-a^4}, & \tau < 0 \\ \frac{a^{3\tau}}{1-a^4}, & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (\text{题 5.3.10})$$

答案:  $x(n)$  的各阶矩为

$$\begin{aligned}\mu_{1x} &= \frac{1}{1-a} \quad (\text{均值}) \\ \mu_{2x}(\tau) &= \frac{a^{|\tau|}}{1-a^2} \quad (\text{自相关函数}) \\ \mu_{3x}(\tau_1, \tau_2) &= \begin{cases} \frac{a^{(\tau_1+\tau_2)}}{1-a^3}, & \tau_1 > 0, \tau_2 > 0 \\ \frac{a^{(\tau_1+\tau_2)}}{1-a^3} a^{-3\min(\tau_1, \tau_2)}, & \text{其他} \end{cases} \\ \mu_{4x}(\tau, \tau, \tau) &= \begin{cases} \frac{a^{|\tau|}}{1-a^4}, & \tau < 0 \\ \frac{a^{3\tau}}{1-a^4}, & \tau \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

题 5.4 根据矩的定义知,  $k \times 1$  向量  $[x, \dots, x]^T$  的矩定义为

$$m_{kx} = E\{x \cdots x\} = E\{x^k\} \quad (\text{题 5.4.1})$$

由于  $E\{x^k\}$  是随机变量  $x$  的  $k$  阶矩, 故有

$$E\{x^k\} = (-j)^k \frac{d^k \Phi_x(\omega)}{d\omega^k} \quad (\text{题 5.4.2})$$

式中  $\Phi_x(\omega)$  是随机变量  $x$  的矩生成函数.

综合式 (题 5.4.1) 和式 (题 5.4.2) 知,  $k \times 1$  向量  $[x, \dots, x]^T$  的矩可表示为

$$m_{kx} = (-j)^k \frac{d^k \Phi_x(\omega)}{d\omega^k} \quad (\text{题 5.4.3})$$

令  $\Psi_x(\omega) = \ln \Phi_x(\omega)$  是随机变量  $x$  的累积量输出函数, 则由式 (题 5.4.3) 知,  $k \times 1$  向量  $[x, \dots, x]^T$  的累积量可写作

$$c_{kx} = (-j)^k \frac{d^k \Psi_x(\omega)}{d\omega^k} \quad (\text{题 5.4.4})$$

证毕.

题 5.5 令  $x = [x, \dots, x]^T$  为一  $k \times 1$  向量, 则其矩生成函数为

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= E\{e^{j(\omega_1 x + \dots + \omega_k x)}\} \\ &= E\left\{\exp\left(j \sum_{i=1}^k \omega_i x\right)\right\} \\ &= \int_{-1}^{\infty} \exp\left[-1 - \left(1 - \sum_{i=1}^k j\omega_i\right)x\right] dx \\ &= \frac{\exp\left(-j \sum_{i=1}^k \omega_i\right)}{1 - j \sum_{i=1}^k \omega_i} \end{aligned}$$

而累积量生成函数为

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \ln \Phi(\omega) \\ &= -j \sum_{i=1}^k \omega_i - \ln\left(1 - j \sum_{i=1}^k \omega_i\right) \end{aligned}$$

当  $k = 1$  时,

$$\Psi(\omega) = -j\omega - \ln(1 - j\omega)$$

其一阶偏导数为

$$\frac{\partial \Psi(\omega)}{\partial \omega} = -j + \frac{1}{1 - j\omega}$$

故  $x$  的一阶累积量为

$$c_x = (-j) \left. \frac{\partial \Psi(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = 0 \quad (\text{题 5.5.1})$$

而对于  $k > 1$  的一般情况, 由于偏导

$$\frac{\partial^k \Psi(\omega)}{\partial \omega_1 \cdots \partial \omega_k} = \frac{j^k (k-1)!}{\left(1 - j \sum_{i=1}^k \omega_i\right)^k}$$

故  $x$  的  $k$  阶累积量为

$$\begin{aligned}
 c_{kx} &= (-j)^k \frac{\partial^k \Psi(\omega)}{\partial \omega \cdots \partial \omega_k} \Big|_{\omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = 0} \\
 &= (-j)^k \frac{j^k (k-1)!}{\left(1 - j \sum_{i=1}^k \omega_i\right)^k} \Big|_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k = 0} \\
 &= (k-1)! \qquad \qquad \qquad (\text{题 5.5.2})
 \end{aligned}$$

答案:  $x$  的  $k$  阶累积量由

$$c_{kx} = \text{cum}(x, \dots, x) = (k-1)!$$

给出.

**题 5.6** 由于随机变量  $x$  的概率密度函数为  $f(x) = 0.5e^{-|x|}$ ,  $-\infty < x < \infty$ , 所以  $x$  的矩生成函数为

$$\begin{aligned}
 \Phi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|+j\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(1-j\omega)x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{(1+j\omega)x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{-1+j\omega} e^{-(1-j\omega)x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{1+j\omega} e^{(1+j\omega)x} \Big|_{-\infty}^0 \right) \\
 &= \frac{1}{1+\omega^2}
 \end{aligned}$$

由此得  $x$  的累积量生成函数为

$$\Psi(\omega) = \ln \Phi(\omega) = \ln \frac{1}{1+\omega^2} = -\ln(1+\omega^2)$$

它的一阶导数为

$$\Psi'(\omega) = -\frac{2\omega}{1+\omega^2}$$

二阶和三阶导数为

$$\begin{aligned}\Psi''(\omega) &= -\frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \times 2\omega \\ &= -\frac{2}{1+\omega^2} + \frac{4\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \\ \Psi^{(3)}(\omega) &= \frac{4\omega}{(1+\omega^2)^2} + \frac{8\omega}{(1+\omega^2)^2} - \frac{16\omega^3(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)^4}\end{aligned}$$

显然, 对于  $k = 4, 5, \dots$ , 导数  $\Psi^{(k)}(\omega)$  均含有  $\omega$  的幂次乘积项。于是, 当  $\omega = 0$  时, 有

$$\begin{aligned}\Psi'(0) &= 0 \\ \Psi''(0) &= -2 \\ \Psi^{(k)}(0) &= 0, \quad k \geq 3\end{aligned}$$

由此得累积量为

$$\begin{aligned}c_2 &= (-j)^2 \Psi''(0) = 2 \\ c_k &= (-j)^k \Psi^{(k)}(0) = 0, \quad k \geq 3\end{aligned}$$

**答案:** 随机变量  $x$  的二阶累积量等于 2, 而更高阶的累积量恒等于零。

**题 5.7** 随机变量  $x \sim \chi_m^2$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

因此,  $\chi_m^2$  分布的矩生成函数为

$$\begin{aligned}\Phi_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-(\frac{1}{2}-j\omega)x} dx \\ &= (1-j2\omega)^{-\frac{m}{2}}\end{aligned}$$

取自然对数后, 得累积量生成函数

$$\Psi_x(\omega) = \ln \Phi_x(\omega) = -\frac{m}{2} \ln(1-j2\omega)$$

累积量生成函数的各阶导数为

$$\begin{aligned}\Psi'_x(\omega) &= -\frac{m}{2(1-j2\omega)} \times (-j2) = \frac{jm}{1-j2\omega} \\ \Psi''_x(\omega) &= -\frac{jm}{(1-j2\omega)^2} \times (-j2) = \frac{-2m}{(1-j2\omega)^2} \\ \Psi^{(3)}_x(\omega) &= \frac{-j8m}{(1-j2\omega)^3}\end{aligned}$$

写成一般公式, 有

$$\Psi_x^{(k)}(\omega) = \frac{j^k 2^{k-1} (k-1)! m}{(1-j2\omega)^k}$$

于是,  $x \sim \mathcal{N}_m^2$  分布随机变量的  $k$  阶累积量由下式给出:

$$c_{kx} = -j^k \Psi_{\mathcal{N}_m^2}^{(k)}(\omega) \Big|_{\omega=0} = (-j)^k \times j^k 2^{k-1} (k-1)! m = 2^{k-1} (k-1)! m$$

**答案:**  $\mathcal{N}_m^2$  分布随机变量的  $k$  阶累积量等于  $2^{k-1} (k-1)! m$ .

**题 5.8** 由题 5.2 的式 (题 5.2.3) 知, 高斯随机过程  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  的第一特征函数分别为

$$\begin{aligned}\Phi_x(\omega) &= \mathbf{E}\{e^{jx\omega}\} = \exp\left(j\omega\mu_1 - \frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}\right) \\ \Phi_y(\omega) &= \mathbf{E}\{e^{jy\omega}\} = \exp\left(j\omega\mu_2 - \frac{\omega^2\sigma_2^2}{2}\right)\end{aligned}$$

于是, 随机过程  $z(t) = x(t) + y(t)$  的特征函数为

$$\Phi_z(\omega) = \mathbf{E}\{e^{jz\omega}\} = \mathbf{E}\{e^{j(x+y)\omega}\}$$

由于  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  统计独立, 故上式变作

$$\begin{aligned}\Phi_z(\omega) &= \mathbf{E}\{e^{jx\omega}\} \mathbf{E}\{e^{jy\omega}\} \\ &= \exp\left(j\omega\mu_1 - \frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}\right) \exp\left(j\omega\mu_2 - \frac{\omega^2\sigma_2^2}{2}\right) \\ &= \exp\left[j\omega(\mu_1 + \mu_2) - \frac{\omega^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\right]\end{aligned}$$

**答案:** 两个统计独立的高斯随机过程  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  之和  $z(t) = x(t) + y(t)$  仍然是一个高斯随机过程, 其均值等于两个高斯随机过程均值之和, 即  $\mu_z = \mu_1 + \mu_2$ , 并且其方差为两个高斯随机过程方差之和, 即  $\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

**题 5.9** (1) 线性系统的输出等于输入与系统冲激响应的卷积, 即

$$y(n) = h_n * e(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i e(n-i)$$

将这一关系代入下面的累积量定义, 得

$$\begin{aligned} & c_{ky}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \\ &= \text{cum}[y(n), y(n+\tau_1), \dots, y(n+\tau_{k-1})] \\ &= \text{cum} \left[ \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} h_{i_1} e(n-i_1), \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} h_{i_2} e(n+\tau_1-i_2), \dots, \sum_{i_k=-\infty}^{\infty} h_{i_k} e(n+\tau_{k-1}-i_k) \right] \\ &= \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_k=-\infty}^{\infty} h_1 \dots h_k \text{cum}[e(n-i_1), e(n+\tau_1-i_2), \dots, e(n+\tau_{k-1}-i_k)] \\ &= \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_k=-\infty}^{\infty} h_1 \dots h_k c_{ke}(\tau_1+i_1-i_2, \dots, \tau_{k-1}+i_1-i_k) \end{aligned} \quad (\text{题 5.9.1})$$

(2) 由于  $k$  阶谱

$$S_{ky}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = Y(\omega_1) \dots Y(\omega_{k-1}) Y \left( -\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \right)$$

并且  $Y(\omega) = H(\omega)E(\omega)$ , 其中  $H(\omega)$  和  $E(\omega)$  分别是系统的传递函数和输入  $e(n)$  的频谱, 故有

$$\begin{aligned} & S_{ky}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \\ &= H(\omega_1)E(\omega_1) \dots H(\omega_{k-1})E(\omega_{k-1}) H \left( -\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \right) Y \left( -\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \right) \\ &= H(\omega_1) \dots H(\omega_{k-1}) H \left( -\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \right) E(\omega_1) \dots E(\omega_{k-1}) E \left( -\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \right) \\ &= H(\omega_1) \dots H(\omega_{k-1}) H \left( -\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \right) S_{ke}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \end{aligned}$$

**答案:**

(1)  $\{y(n)\}$  的  $k$  阶累积量为

$$c_{ky}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_k=-\infty}^{\infty} h_1 \dots h_k c_{ke}(\tau_1+i_1-i_2, \dots, \tau_{k-1}+i_1-i_k)$$

(2)  $\{y(n)\}$  的多谱为

$$S_{ky}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = H(\omega_1) \cdots H(\omega_{k-1}) H\left(-\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i\right) S_{ke}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})$$

**题 5.10** 由于  $x(n)$  和  $y(n)$  的均值都为零, 所以  $z(n)$  的均值为

$$E\{z(n)\} = E\{x(n) \cos(\omega_c n) + y(n) \sin(\omega_c n)\} = 0$$

二阶累积量为

$$\begin{aligned} c_{2z}(\tau) &= E\{[x(n) \cos(\omega_c n) + y(n) \sin(\omega_c n)] \times \\ &\quad [x(n + \tau) \cos(\omega_c(n + \tau)) + y(n + \tau) \sin(\omega_c(n + \tau))]\} \\ &= c_{2x}(\tau) \cos(\omega_c \tau) \end{aligned}$$

与时间  $n$  独立, 所以  $z(n)$  是一个广义平稳的随机过程.

计算  $z(n)$  的三阶累积量, 得

$$\begin{aligned} c_{3z}(\tau_1, \tau_2) &= E\{z(n)z(n + \tau_1)z(n + \tau_2)\} \\ &= c_{3x}(\tau_1, \tau_2) \{ \cos(\omega_c n) \cos[\omega_c(n + \tau_1)] \cos[\omega_c(n + \tau_2)] + \\ &\quad \sin(\omega_c n) \sin[\omega_c(n + \tau_1)] \sin[\omega_c(n + \tau_2)] \} \end{aligned}$$

与时间  $n$  有关, 所以  $z(n)$  在三阶累积量域是一个非平稳随机过程.

**答案:**  $z(n)$  是一广义平稳过程, 但不是一个严格平稳过程.

**题 5.11** (1) 由累积量定义知

$$c_{3y}(-m, n - m) = \text{cum}[y(t), y(t - m), y(t + n - m)]$$

由于累积量是关于变元对称的, 故有

$$\begin{aligned} c_{3y}(-m, n - m) &= \text{cum}[y(t - m), y(t), y(t + n - m)] \\ &= c_{3y}(m, n) \end{aligned} \tag{题 5.11.1}$$

类似地

$$\begin{aligned} c_{3y}(m - n, -n) &= \text{cum}[y(t), y(t + m - n), y(t - n)] \\ &= \text{cum}[y(t - n), y(t + m - n), y(t)] \\ &= c_{3y}(m, n) \end{aligned} \tag{题 5.11.2}$$

综合式 (题 5.11.1) 和式 (题 5.11.2) 得到

$$c_{3y}(m, n) = c_{3y}(-m, n - m) = c_{3y}(m - n, -n)$$

这就完成了本习题需要证明的三阶累积量的对称公式。

(2) 根据双谱的定义知

$$B(-\omega_2, -\omega_1) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3y}(\tau_1, \tau_2) e^{-j(-\omega_2\tau_1 - \omega_1\tau_2)}$$

注意到实信号的累积量为实数, 取双谱  $B(-\omega_2, -\omega_1)$  的复数共轭后, 则

$$B^*(-\omega_2, -\omega_1) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3y}(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_2\tau_1 + \omega_1\tau_2)}$$

作变量代换  $\tau_1 = u_2$  和  $\tau_2 = u_1$  后, 上式变作

$$B^*(-\omega_2, -\omega_1) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3y}(u_2, u_1) e^{-j(\omega_2u_2 + \omega_1u_1)}$$

利用三阶累积量的对称性  $c_{3y}(u_2, u_1) = c_{3y}(u_1, u_2)$ , 即有

$$\begin{aligned} B^*(-\omega_2, -\omega_1) &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3y}(u_1, u_2) e^{-j(\omega_1u_1 + \omega_2u_2)} \\ &= B(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (\text{题 5.11.3})$$

注意到

$$\begin{aligned} B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3y}(\tau_1, \tau_2) e^{-j[\omega_2\tau_1 + (-\omega_1 - \omega_2)\tau_2]} \\ &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3y}(\tau_1, \tau_2) e^{-j[-\omega_1\tau_2 + \omega_2(\tau_1 - \tau_2)]} \end{aligned}$$

作变量代换  $\tau_1 = n - m$  和  $\tau_2 = -m$ , 则

$$B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3y}(n - m, -m) e^{-j(\omega_1m + \omega_2n)}$$

利用三阶累积量的对称性  $c_{3y}(m, n) = c_{3y}(-m, n - m) = c_{3y}(n - m, -m)$ , 立即有

$$B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3y}(m, n) e^{-j(\omega_1m + \omega_2n)} = B(\omega_1, \omega_2) \quad (\text{题 5.11.4})$$

综合式 (题 5.11.3) 和式 (题 5.11.4), 则有

$$B(\omega_1, \omega_2) = B^*(-\omega_2, -\omega_1) = B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2)$$

这就证明了本习题的第二部分。证毕。

**题 5.12** 令独立同分布过程  $\{e(n)\}$  的  $k$  阶累积量为  $\gamma_{ke}$ , 则它激励线性系统的输出为

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i e(n-i)$$

其多谱为

$$S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \exp\left(-j \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \tau_i\right)$$

考虑多谱的绝对值, 我们有

$$\begin{aligned} |S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})| &= \left| \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \exp\left(-j \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \tau_i\right) \right| \\ &\leq \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} \left| c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \exp\left(-j \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \tau_i\right) \right| \\ &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} |c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})| \end{aligned} \quad (\text{题 5.12.1})$$

将累积量的 BBR 公式 (5.1.30) 代入不等式 (题 5.12.1), 得

$$\begin{aligned} |S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})| &\leq \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} |c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})| \\ &= |\gamma_{ke}| \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i h_{i+\tau_1} \cdots h_{i+\tau_{k-1}}| \\ &= |\gamma_{ke}| \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} |h_{i+\tau_1}| \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} |h_{i+\tau_{k-1}}| \end{aligned} \quad (\text{题 5.12.2})$$

注意到

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} |h_{i+\tau_1}| = \cdots = \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} |h_{i+\tau_{k-1}}| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| \quad (\text{题 5.12.3})$$

将式 (题 5.12.3) 代入式 (题 5.12.2), 得

$$|S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})| \leq |\gamma_{ke}| \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| \right)^k \quad (\text{题 5.12.4})$$

将题给已知绝对可求和条件代入式 (题 5.12.4), 立即有

$$|S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})| < \infty \quad (\text{题 5.12.5})$$

多谱的绝对有界说明了多谱的存在性。由于  $k$  阶谱是累积量的  $k-1$  维 Fourier 变换, 而 Fourier 变换是连续的, 故多谱是  $\omega_1, \dots, \omega_{k-1}$  的连续函数。证毕。

**题 5.13** 令  $\{y(t)\}$  是用独立同分布过程  $\{e(n)\}$  激励线性系统  $\{h_i\}$  的输出序列, 则对于任意一个非零的实数  $A$  和任意整数  $m$ , 用  $\{Ae(n+m)\}$  激励线性系统  $\{A^{-1}h_{i-m}\}$  得到的输出序列仍然是  $\{y(n)\}$ 。就是说, 系统冲激响应  $\{h_i\}$  的符号、尺度因子和时间原点不可能从多谱  $S(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})$  判断出, 因此, 通常假定  $H(e^{j0}) = 1$ 。在这一假设下, 我们来考虑三阶统计量情况下本习题的证明。

令  $\gamma_{3e} \neq 0$ , 并取  $\omega_1 = \omega$  和  $\omega_2 = 0$ , 则由公式

$$S(\omega_1, \omega_2) = \gamma_{3e} H(e^{j\omega_1}) H(e^{j\omega_2}) H(e^{-j(\omega_1+\omega_2)}) \quad (\text{题 5.13.1})$$

得出结果

$$S(\omega, 0) = \gamma_{3e} |H(e^{j\omega})|^2$$

即

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{S(\omega, 0)}{S(0, 0)}} \quad (\text{题 5.13.2})$$

记  $H(e^{j\omega})$  的相位为  $\phi(\omega)$ , 而  $S(\omega_1, \omega_2)$  的相位为  $\psi(\omega_1, \omega_2)$ , 并令  $\phi(\omega)$  的导数为  $\dot{\phi}(\omega)$ 。由假设知  $\phi(0) = 0$ , 且  $\phi(\omega)$  为奇函数。因此, 由式 (题 5.13.1) 可得相位关系如下:

$$\phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) - \phi(\omega_1 + \omega_2) = \psi(\omega_1, \omega_2) \quad (\text{题 5.13.3})$$

求上式各项关于  $\omega_2$  的偏导, 则有

$$\dot{\phi}(\omega_2) - \frac{\partial \phi(\omega_1 + \omega_2)}{\partial \omega_2} = \frac{\partial \psi(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}$$

将  $\omega_1 = \omega$  和  $\omega_2 = 0$  代入上式后, 得

$$\dot{\phi}(\omega) = \dot{\phi}(0) - \left. \frac{\partial \psi(\omega, \omega_2)}{\partial \omega_2} \right|_{\omega_2=0}$$

其积分为

$$\int_0^\omega \dot{\phi}(\nu) d\nu = \int_0^\omega \dot{\phi}(0) d\nu - \int_0^\omega \left. \frac{\partial \psi(\nu, \omega_2)}{\partial \omega_2} \right|_{\omega_2=0} d\nu$$

化简后为

$$\phi(\omega) = \dot{\phi}(0)\omega - \int_0^\omega \left. \frac{\partial \psi(\nu, \omega_2)}{\partial \omega_2} \right|_{\omega_2=0} d\nu \quad (\text{题 5.13.4})$$

定义

$$\gamma(\omega) = \int_0^\omega \left. \frac{\partial \psi(\nu, \omega_2)}{\partial \omega_2} \right|_{\omega_2=0} d\nu \quad (\text{题 5.13.5})$$

则式 (题 5.13.4) 可以写作

$$\phi(\omega) = \dot{\phi}(0)\omega - \gamma(\omega) \quad (\text{题 5.13.6})$$

由于

$$H(e^{j\pi}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i e^{-j\omega i} \Big|_{\omega=\pi} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i (-1)^i$$

为实数, 故必然有  $\phi(\pi) = m\pi$ , 其中  $m$  为整数。于是, 由式 (题 5.13.6) 得

$$\phi(\pi) = m\pi = \dot{\phi}(0)\pi - \gamma(\pi) \quad (\text{题 5.13.7})$$

从而可以得到一阶导数  $\dot{\phi}(0)$  的值为

$$\dot{\phi}(0) = m + \frac{\gamma(\pi)}{\pi} \quad (\text{题 5.13.8})$$

将式 (题 5.13.8) 代入式 (题 5.13.6), 即知相位  $\phi(\omega)$  可以用下式估计:

$$\phi(\omega) = m\omega + \frac{\omega}{\pi}\gamma(\pi) - \gamma(\omega) \quad (\text{题 5.13.9})$$

式 (题 5.13.2) 和式 (题 5.13.9) 分别组成了从三谱  $S(\omega_1, \omega_2)$  重构线性系统传递函数  $H(e^{j\omega})$  的幅值和相位的公式。

对于  $k > 3$  的高阶情况, 只需要令  $\omega_1 = \omega$  和  $\omega_i = 0, i = 2, 3, \dots, k-1$ , 并重复以上步骤, 即可证明  $H(e^{j\omega})$  可以从  $k$  阶谱  $S(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})$  得到, 至多相差一个未知的复常数尺度因子  $Ae^{j\omega m}$ , 其中  $A$  是一个实数 (正或负), 而  $m$  为整数。证毕。

**题 5.14** 由累积量的 BBR 公式, 有

$$c_{kz}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = \gamma_{ke} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+\tau_1)\cdots h(i+\tau_{k-1})$$

其  $k-1$  维离散 Fourier 变换给出多谱

$$\begin{aligned}
 & S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \\
 &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_{k-1} \tau_{k-1})} \\
 &= \gamma_{ke} \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) h(i + \tau_1) \cdots h(i + \tau_{k-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_{k-1} \tau_{k-1})} \\
 &= \gamma_{ke} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) e^{j(\omega_1 + \dots + \omega_{k-1})i} \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} h(i + \tau_1) e^{-j\omega_1(i + \tau_1)} \cdots \times \\
 &\quad \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} h(i + \tau_{k-1}) e^{-j\omega_{k-1}(i + \tau_{k-1})} \\
 &= \gamma_{ke} H(-\omega_1 \cdots - \omega_{k-1}) H(\omega_1) \cdots H(\omega_{k-1})
 \end{aligned}$$

证毕.

**题 5.15** 首先, 令

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i e^{-j\omega i} \quad (\text{题 5.15.1})$$

由于冲激响应是绝对可求和的, 所以系统传递函数  $H(e^{j\omega})$  是连续的.

求式 (题 5.15.1) 相对于  $\omega$  的导数, 得

$$\frac{dH(e^{j\omega})}{d\omega} = -j \sum_{i=-\infty}^{\infty} i h_i e^{-j\omega i} \quad (\text{题 5.15.2})$$

然而, 由于

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |i h_i e^{-j\omega i}| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |i h_i| < \infty$$

故  $H(e^{j\omega})$  本身是连续可导的.

记

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + j H_I(e^{j\omega})$$

其中  $H_R(e^{j\omega})$  和  $H_I(e^{j\omega})$  分别是  $H(e^{j\omega})$  的实部和虚部.

求  $\phi(\omega) = \tan^{-1} [H_I(e^{j\omega})/H_R(e^{j\omega})]$  相对于  $\omega$  的导数, 即得

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{\frac{dH_I(e^{j\omega})}{d\omega} H_R(e^{j\omega}) - \frac{dH_R(e^{j\omega})}{d\omega} H_I(e^{j\omega})}{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad (\text{题 5.15.3})$$

因为  $H(e^{j\omega}) \neq 0$ , 故式 (题 5.15.4) 的函数存在, 并对所有  $\omega$  都是连续的。证毕。

**题 5.16** 令 MA( $q$ ) 过程  $\{y(n)\}$  为

$$y(n) = \sum_{i=0}^q b_i e(n-i)$$

于是, 其三阶累积量

$$\begin{aligned} c_{3y}(\tau_1, \tau_2) &= \text{cum}[y(n), y(n+\tau_1), y(n+\tau_2)] \\ &= \text{cum} \left[ \sum_{i=0}^q b_i e(n-i), \sum_{j=0}^q b_j e(n+\tau_1-j), \sum_{l=0}^q b_l e(n+\tau_2-l) \right] \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \sum_{l=0}^q h_i h_j h_l \text{cum}[e(n-i), e(n+\tau_1-j), e(n+\tau_2-l)] \end{aligned}$$

由于  $e(n)$  为独立同分布随机过程, 故  $\text{cum}[e(n-i), e(n+\tau_1-j), e(n+\tau_2-l)]$  不等于零的条件为

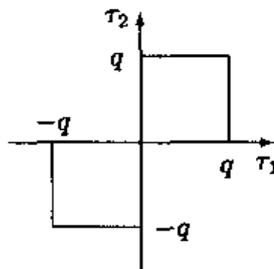
$$i = j - \tau_1 = l - \tau_2$$

即

$$\tau_1 = j - i \quad \text{和} \quad \tau_2 = l - i$$

其中  $i, j, l = 0, \dots, q$ 。

图题 5.16 画出了 MA( $q$ ) 过程三阶累积量不等于零的  $\tau_1$  和  $\tau_2$  范围。



图题 5.16  $c_{3y}(\tau_1, \tau_2) \neq 0$  的  $(\tau_1, \tau_2)$  区域

**题 5.17** 由题意知

$$\hat{x}_i = x_i * s_i = \sum_j x_{i-j} h_j \quad (\text{题 5.17.4})$$

故有

$$\begin{aligned}
 E\{\tilde{x}_i|^2\} &= E\left\{\left|\sum_j x_{i-j}h_j\right|^2\right\} \\
 &= E\left\{\sum_j \sum_k x_{i-j}x_{i-k}^*s_j s_k^*\right\} \\
 &= \sum_j \sum_k E\{x_{i-j}x_{i-k}^*\}s_j s_k^* \\
 &= E\{|x_i|^2\} \sum_j |s_j|^2
 \end{aligned}$$

式中利用了  $\{x_i\}$  独立同分布以及  $\{h_j\}$  是时不变系统的冲激响应这两个假设条件。上式即是待证明的式 (题 5.17.1)。

类似地, 取式 (题 5.17.4) 的平方, 并取数学期望, 又有

$$E\{\tilde{x}_i^2\} = E\{x_i^2\} \sum_j s_j^2 \quad (\text{题 5.17.5})$$

然后, 取式 (题 5.17.4) 的模的四次方, 再取数学期望, 则得

$$\begin{aligned}
 E\{|\tilde{x}_i|^4\} &= E\left\{\left|\sum_j x_{i-j}s_j\right|^4\right\} \\
 &= E\left\{\sum_j \sum_k \sum_m \sum_l s_j s_k^* s_m s_l^* x_{i-j} x_{i-k}^* x_{i-m} x_{i-l}^*\right\} \\
 &= \sum_j \sum_k \sum_m \sum_l s_j s_k^* s_m s_l^* E\{x_{i-j} x_{i-k}^* x_{i-m} x_{i-l}^*\}
 \end{aligned} \quad (\text{题 5.17.6})$$

利用  $\{x_i\}$  的独立同分布假设, 知

$$E\{x_{i-j} x_{i-k}^* x_{i-m} x_{i-l}^*\} = \begin{cases} E\{|x_i|^4\}, & j = k = m = l \\ E^2\{|x_i|^2\}, & j = k \neq m = l, j = l \neq k = m \\ |E\{x_i^2\}|^2, & j = m \neq k = l \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 5.17.7})$$

将式 (题 5.17.7) 代入式 (题 5.17.6), 得

$$\begin{aligned} E\{|\tilde{x}_i|^4\} &= E\{|x_i|^4\} \sum_j |s_j|^4 + \\ &2E^2\{|x_i|^2\} \left[ \left( \sum_j |s_j|^2 \right)^2 - \sum_j |s_j|^4 \right] + \\ &|E\{x_i^2\}|^2 \left( \left| \sum_j s_j^2 \right|^2 - \sum_j |s_j|^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{题 5.17.8})$$

在式 (题 5.17.8) 中分别使用式 (题 5.17.4) 和式 (题 5.17.5), 并给予重排, 即可分别得到待证明的式 (题 5.17.2) 和式 (题 5.17.3). 证毕.

**题 5.18** 由题 5.17 知, 式 (题 5.17.1) 和式 (题 5.17.2) 成立. 利用序列  $\{x_i\}$  的独立同分布假设, 可以省略掉式 (题 5.17.1) 和式 (5.17.2) 中的下标  $i$ , 得到

$$E\{|\tilde{x}|^2\} = E\{|x|^2\} \sum_j |s_j|^2 \quad (\text{题 5.18.1})$$

和

$$K(\tilde{x}) = K(x) \sum_j |s_j|^4 \quad (\text{题 5.18.2})$$

当  $E\{|\tilde{x}|^2\} = E\{|x|^2\}$  时, 由式 (题 5.18.1) 知

$$\sum_j |s_j|^2 = 1 \quad (\text{题 5.18.3})$$

令  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots]^T$  是一个复向量. 当系统稳定时, 其冲激响应  $\{s_j\}$  是绝对可求和的, 即有

$$\sum_j |s_j|^2 < \infty$$

此时

$$\sum_j |s_j|^4 < \left( \sum_j |s_j|^2 \right)^2 \quad (\text{题 5.18.4})$$

等式成立当且仅当  $\mathbf{s}$  至多只有一个非零元素. 将式 (题 5.18.3) 代入式 (题 5.18.4), 立即知

$$\sum_j |s_j|^4 < 1 \quad (\text{题 5.18.5})$$

当且仅当  $s$  只有一个幅值等于 1 的非零元素时

$$\sum_j |s_j|^4 = 1 \quad (\text{题 5.18.6})$$

将式 (题 5.18.5) 和式 (题 5.18.6) 分别代入式 (题 5.18.2) 立即得到所需要证明的结果 (1) 和 (2). 证毕.

**题 5.19**<sup>[25]</sup> 首先, 由于  $\{x(n)\}$  的均值为零, 故其累积量

$$\begin{aligned} c_{2x}(\tau) &= m_{2x}(\tau) \\ &= E\{x(n)x(n+\tau)\} \\ &= E\{[w(n) - w(n-1)][w(n+\tau) - w(n+\tau-1)]\} \\ &= 2\delta(\tau) - \delta(\tau-1) - \delta(\tau+1) \end{aligned} \quad (\text{题 5.19.1})$$

式中  $\delta(\tau)$  为 Kronecker  $\delta$  函数, 即  $\delta(\tau) = 1$  (若  $\tau = 0$ ) 或  $\delta(\tau) = 0$  (若  $\tau \neq 0$ ). 因此, 累积量的具体数值为

$$c_{2x}(\tau) = \begin{cases} 2, & \tau = 0 \\ -1, & \tau = 1 \text{ 或 } \tau = -1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 5.19.2})$$

由此求得功率谱

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_{2x}(\tau)e^{-j\omega\tau} \\ &= \sum_{\tau=-1}^1 c_{2x}(\tau)e^{-j\omega\tau} = (2 - 2\cos\omega) \end{aligned} \quad (\text{题 5.19.3})$$

另一方面,  $\{x(n)\}$  的三阶累积量为

$$\begin{aligned} c_{3x}(\tau_1, \tau_2) &= m_{3x}(\tau_1, \tau_2) \\ &= E\{x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)\} \\ &= E\{[w(n) - w(n-1)][w(n+\tau_1) - w(n+\tau_1-1)] \times \\ &\quad [w(n+\tau_2) - w(n+\tau_2-1)]\} \end{aligned}$$

利用  $w(n)$  的独立同分布性质、方差  $E\{w^2(n)\} = 1$  及三阶累积量  $\gamma_{3w} = E\{w^3(n)\} =$

1. 可以具体求出累积量  $c_{3x}(\tau_1, \tau_2)$  的值如下:

$$\begin{aligned} c_{3x}(\tau_1, \tau_2) &= -\delta(\tau_1, \tau_2) + \delta(\tau_1 - 1, \tau_2 - 1) - \delta(\tau_1, \tau_2 - 1) + \\ &\quad \delta(\tau_1 + 1, \tau_2) - \delta(\tau_1 + 1, \tau_2 + 1) + \delta(\tau_1, \tau_2 + 1) \end{aligned} \quad (\text{题 5.19.4})$$

故  $\{x(n)\}$  的双谱为

$$\begin{aligned} S_{3x}(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3x}(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} \\ &= -e^{-j\omega_1} + e^{-j(\omega_1 + \omega_2)} - e^{-j\omega_2} + e^{j\omega_1} - e^{j(\omega_1 + \omega_2)} + e^{j\omega_2} \\ &= 2j \sin \omega_1 + 2j \sin \omega_2 - 2j \sin(\omega_1 + \omega_2) \\ &= 2j [\sin \omega_1 + \sin \omega_2 - \sin(\omega_1 + \omega_2)] \end{aligned} \quad (\text{题 5.19.5})$$

**题 5.20** 由条件  $E\{\alpha\} = 0$  知, 复谐波过程是一个零均值过程, 因为  $E\{x(n)\} = E\{\alpha\}e^{j\omega_0 n} = 0$ . 因此, 复谐波过程的协方差函数与相关函数相同, 即有

$$\begin{aligned} c_{2x}(\tau) &= E\{x(n)x^*(n+\tau)\} \\ &= E\{\alpha^2 e^{-j\omega_0 \tau}\} \\ &= Q e^{-j\omega_0 \tau} \end{aligned} \quad (\text{题 5.20.1})$$

从而得功率谱为

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_{2x}(\tau) e^{-j\omega \tau} \\ &= Q \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)\tau} \\ &= Q \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned} \quad (\text{题 5.20.2})$$

式中使用了结果

$$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega \tau} = 1$$

和

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega \tau} = \delta(\omega)$$

另外, 我们有

$$\begin{aligned} E\{x(n)x(n+\tau)\} &= E\{\alpha^2 e^{j\omega_0(2n+\tau)}\} \\ &= Q^2 e^{j\omega_0(2n+\tau)} \end{aligned} \quad (\text{题 5.20.3})$$

$$\begin{aligned} E\{x^*(n)x^*(n+\tau)\} &= E\{\alpha^2 e^{-j\omega_0(2n+\tau)}\} \\ &= Q^2 e^{-j\omega_0(2n+\tau)} \end{aligned} \quad (\text{题 5.20.4})$$

计算  $\{x(n)\}$  的四阶矩, 得

$$\begin{aligned} m_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= E\{x(n)x^*(n+\tau_1)x(n+\tau_2)x^*(n+\tau_3)\} \\ &= E\{\alpha^4 e^{j\omega_0(\tau_2-\tau_1-\tau_3)}\} \\ &= \mu e^{j\omega_0(\tau_2-\tau_1-\tau_3)} \end{aligned} \quad (\text{题 5.20.5})$$

$\{x(n)\}$  的四阶累积量为

$$\begin{aligned} c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= m_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \\ &\quad E\{x(n)x^*(n+\tau_1)\}E\{x(n+\tau_2)x^*(n+\tau_3)\} - \\ &\quad E\{x(n)x(n+\tau_2)\}E\{x^*(n+\tau_1)x^*(n+\tau_3)\} - \\ &\quad E\{x(n)x^*(n+\tau_3)\}E\{x^*(n+\tau_1)x(n+\tau_2)\} \end{aligned}$$

将式 (题 5.20.1) 至式 (题 5.20.3) 代入上式, 易知

$$\begin{aligned} c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \mu e^{j\omega_0(\tau_2-\tau_1-\tau_3)} - Q^2 e^{j\omega_0(-\tau_1)} e^{j\omega_0(\tau_2-\tau_3)} - \\ &\quad Q^2 e^{j\omega_0(2n+\tau_2)} e^{-j\omega_0(2n+\tau_1+\tau_3)} - Q^2 e^{-j\tau_3} e^{j(\tau_2-\tau_1)} \\ &= (\mu - 3Q^2) e^{j(\tau_2-\tau_1-\tau_3)} \end{aligned} \quad (\text{题 5.20.6})$$

取特殊切片  $\tau_1 = \tau, \tau_2 = \tau_3 = 0$ , 则

$$c_{4x}(\tau, 0, 0) = (\mu - 3Q^2) e^{-j\omega_0\tau} \quad (\text{题 5.20.7})$$

其功率谱

$$\begin{aligned} P_{1x}(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_{4x}(\tau, 0, 0) e^{-j\omega\tau} \\ &= (\mu - 3Q^2) \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)\tau} \\ &= (\mu - 3Q^2) \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned} \quad (\text{题 5.20.8})$$

比较式(题 5.20.2)和式(题 5.20.8)立即有

$$P_{1x}(\omega) = \frac{\mu - 3Q^2}{Q} S_x(\omega) = \frac{\gamma}{\omega} S_x(\omega) \quad (\text{题 5.20.9})$$

式中  $\gamma = \mu - 3Q^2$ 。证毕。

**题 5.21<sup>[31]</sup>** 由冲激响应  $h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$  知, FIR 系统的频率传递函数

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= 1 - \alpha e^{-j\omega} \end{aligned} \quad (\text{题 5.21.1})$$

系统输出为

$$x(n) = \sum_{i=0}^1 h(i)e(n-i) = e(n) - \alpha e(n-1) \quad (\text{题 5.21.2})$$

其功率谱

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \sigma_e^2 |H(\omega)|^2 \\ &= \sigma_e^2 |1 - \alpha e^{-j\omega}|^2 \\ &= \sigma_e^2 (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega) \end{aligned} \quad (\text{题 5.21.3})$$

双谱

$$\begin{aligned} S_{3x}(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_{3e} H(\omega_1) H(\omega_2) H(-\omega_1 - \omega_2) \\ &= \gamma_{3e} (1 - \alpha e^{-j\omega_1})(1 - \alpha e^{-j\omega_2})(1 - \alpha e^{j(\omega_1 + \omega_2)}) \\ &= \gamma_{3e} [(1 - \alpha^3) + \alpha^2 \beta(\omega_1, \omega_2) - \alpha \beta^*(\omega_1, \omega_2)] \end{aligned} \quad (\text{题 5.21.4})$$

式中  $\beta(\omega_1, \omega_2) = e^{j\omega_1} + e^{j\omega_2} + e^{-j(\omega_1 + \omega_2)}$ 。

取特殊切片  $\omega_1 = \omega$  和  $\omega_2 = 0$  后, 则

$$\begin{aligned} S_{3x}(\omega, 0) &= \gamma_{3e} [(1 - \alpha^3) + \alpha^2 \beta(\omega, 0) - \alpha \beta^*(\omega, 0)] \\ &= \gamma_{3e} [(1 - \alpha^3) + \alpha^2 (1 + j^{j\omega} + e^{-j\omega}) - \alpha (1 + e^{-j\omega} + e^{j\omega})] \\ &= \gamma_{3e} [(1 - \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha) + (\alpha^2 - \alpha) \cos \omega] \\ &= \gamma_{3e} H(0) (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega) \end{aligned} \quad (\text{题 5.21.5})$$

比较式(题 5.21.3)与式(题 5.21.5)立即有

$$S_{3x}(\omega, 0) = \frac{\gamma_{3e}}{\sigma_e^2} H(0) S_x(\omega) \quad (\text{题 5.21.6})$$

这就是希望证明的结果。证毕。

**题 5.22** 先考虑单个实值谐波信号

$$s(n) = A \cos(\omega n + \phi)$$

由三角恒等式

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta \\ &= \frac{1}{8} [\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma - \delta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma + \delta) + \\ & \quad \cos(\alpha - \beta + \gamma + \delta) + \cos(\alpha - \beta - \gamma - \delta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma - \delta) + \\ & \quad \cos(\alpha - \beta + \gamma - \delta) + \cos(\alpha - \beta - \gamma + \delta)] \end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned} & s(n)s(n + \tau_1)s(n + \tau_2)s(n + \tau_3) \\ &= \frac{A^4}{8} \{ \cos[4\omega n + \omega(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + 4\phi] + \cos[2\omega n + \omega(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) + 2\phi] + \\ & \quad \cos[2\omega n + \omega(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3) + 2\phi] + \cos[2\omega n + \omega(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1) + 2\phi] + \\ & \quad \cos[2\omega n + \omega(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - 2\phi] + \cos[\omega(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] + \\ & \quad \cos[\omega(\tau_2 - \tau_1 - \tau_3)] + \cos[\omega(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] \} \end{aligned}$$

上式取数学期望后，为单个谐波信号  $s(n)$  的四阶矩，即

$$\begin{aligned} m_{4s}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{A^4}{8} \{ \cos[\omega(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] + \cos[\omega(\tau_2 - \tau_3 - \tau_1)] + \\ & \quad \cos[\omega(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] \} \end{aligned} \quad (\text{题 5.22.1})$$

式中利用了  $E\{\phi\} = 0$  对所有在  $[-\pi, \pi]$  内均匀分布的随机变量  $\phi$  均成立这一熟知结果。

另外，谐波信号  $s(n)$  的二阶矩为

$$m_{2s}(\tau) = R_s(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \quad (\text{题 5.22.2})$$

将式 (题 5.22.1) 和式 (题 5.22.2) 代入四阶累积量与矩的转换公式

$$\begin{aligned} c_{4s}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= m_{4s}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_{2s}(\tau_1)m_{2s}(\tau_2 - \tau_3) - \\ & \quad m_{2s}(\tau_2)m_{2s}(\tau_3 - \tau_1) - m_{2s}(\tau_3)m_{2s}(\tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (\text{题 5.22.3})$$

中, 则有

$$c_{4s}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{A^4}{8} \{ \cos[\omega(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] + \cos[\omega(\tau_2 - \tau_3 - \tau_1)] + \cos[\omega(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] \} - \frac{A^4}{4} \cos(\omega\tau_1) \cos[\omega(\tau_2 - \tau_3)] - \frac{A^4}{4} \cos(\omega\tau_2) \cos[\omega(\tau_3 - \tau_1)] - \frac{A^4}{4} \cos(\omega\tau_3) \cos[\omega(\tau_1 - \tau_2)] \quad (\text{题 5.22.4})$$

将积化和差公式

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

代入式 (题 5.22.4), 并化简, 即得

$$c_{4s}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = -\frac{A^4}{8} \{ \cos[\omega(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] + \cos[\omega(\tau_2 - \tau_3 - \tau_1)] + \cos[\omega(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] \} \quad (\text{题 5.22.5})$$

由题中关于相位  $\phi_k$  的相互独立性假设, 则

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \sum_{i=1}^p c_{4s_i}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (\text{题 5.22.6})$$

将式 (题 5.22.5) 代入式 (题 5.22.6), 立即得到

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^p \alpha_k^4 \{ \cos[\omega(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] + \cos[\omega(\tau_2 - \tau_3 - \tau_1)] + \cos[\omega(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] \}$$

证毕.

**题 5.23** 由题之假设和累积量性质, 我们有

$$\begin{aligned} & \text{cum}_4\{x(n-d), x(n-d), y(n), y(n)\} \\ &= \text{cum}_4\{s(n-d), s(n-d), s(n), s(n)\} \\ &= \gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^2(i) f^2(i+d-D) \end{aligned} \quad (\text{题 5.23.1})$$

这里利用了  $\text{cum}_4\{w_1(n-d), w_1(n-d), w_2(n), w_2(n)\} = 0$  等结果.

使用 Cauchy-Schwartz 不等式, 式 (题 5.23.1) 可以写作

$$\begin{aligned} & \text{cum}_4\{x(n-d), x(n-d), y(n), y(n)\} \\ & \leq |\gamma_{4e}| \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i)} \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i+d-D)} \\ & = \gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i) \end{aligned} \quad (\text{题 5.23.2})$$

等号成立当且仅当对每一个  $i$  有  $|f(i)| = |f(i+d-D)|$ . 这意味着, 式 (题 5.23.2) 当且仅当  $d = D$  时才取等号.

类似地, 可以证明

$$\begin{aligned} \text{CUM}_4\{x(n)\} &= \text{cum}_4\{x(n), x(n), x(n), x(n)\} \\ &= \text{cum}_4\{s(n), s(n), s(n), s(n)\} \\ &= \gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i) \end{aligned} \quad (\text{题 5.23.3})$$

和

$$\begin{aligned} \text{CUM}_4\{y(n)\} &= \text{cum}_4\{y(n), y(n), y(n), y(n)\} \\ &= \text{cum}_4\{s(n-d), s(n-d), s(n-d), s(n-d)\} \\ &= \gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i-D) \\ &= \gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i) \end{aligned} \quad (\text{题 5.23.4})$$

将式 (题 5.23.3) 和式 (题 5.23.4) 代入下式:

$$\begin{aligned} J_1(d) &= \frac{|\text{cum}_4\{x(n-d), x(n-d), y(n), y(n)\}|}{\sqrt{|\text{CUM}_4\{x(n)\}| |\text{CUM}_4\{y(n)\}|}} \\ &= \frac{\gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i)}{\sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i) \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i)}} \\ &\leq \frac{\gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i)}{\sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i) \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i)}} \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $d = D$ . 即是说

$$0 \leq J_1(d) \leq 1$$

并且  $j_1(d) = 1$  当且仅当  $d = D$ 。证毕。

**题 5.24** 考查信号  $s(n)$  的四阶累积量, 我们有

$$\begin{aligned}
 c_{4s}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \text{cum}_4\{s(n), s(n + \tau_1), s(n + \tau_2), s(n + \tau_3)\} \\
 &= \text{cum}_4\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)e(n-i), \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)e(n + \tau_1 - j), \right. \\
 &\quad \left. \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e(n + \tau_2 - m), \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)e(n + \tau_3 - l)\right\} \\
 &= \gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)f(i + \tau_1)f(i + \tau_2)f(i + \tau_3) \quad (\text{题 5.24.1})
 \end{aligned}$$

对上式应用 Cauchy-Schwartz 不等式, 得

$$\begin{aligned}
 &|c_{4s}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)| \\
 &\leq |\gamma_{4e}| \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^2(i)f^2(i + \tau_1)} \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^2(i + \tau_2)f^2(i + \tau_3)} \\
 &\leq |\gamma_{4e}| \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i)\right]^{1/4} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i + \tau_1)\right]^{1/4} \times \\
 &\quad \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i + \tau_2)\right]^{1/4} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i + \tau_3)\right]^{1/4} \quad (\text{题 5.24.2})
 \end{aligned}$$

第一个不等式的等号成立当且仅当

$$|f(i)| = |f(i + \tau_1)| = |f(i + \tau_2)| = |f(i + \tau_3)| \quad (\text{题 5.24.3})$$

由于式 (题 5.24.2) 的中括号内的四个求和项相等, 故该式可简化为

$$|c_{4s}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)| \leq |\gamma_{4e}| \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i) \quad (\text{题 5.24.4})$$

等号成立当且仅当式 (题 5.24.3) 的条件满足。

由于  $w_1(n)$  和  $w_2(n)$  均为高斯噪声, 它们的高阶累积量恒等于零, 故

$$\begin{aligned}
 \text{CUM}_4\{x(n-d) + y(n)\} &= \text{CUM}_4\{s(n-d) + s(n-D)\} + \text{CUM}_4\{w_1(n-D) + w_2(n)\} \\
 &= \text{CUM}_4\{s(n-d) + s(n-D)\}
 \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
 & \text{CUM}_4\{x(n-d) + y(n)\} \\
 &= \text{cum}_4\{s(n-d) + s(n-D), s(n-d) + s(n-D), \\
 & \quad s(n-d) + s(n-D), s(n-d) + s(n-D)\} \\
 &= 2c_{4s}(0, 0, 0) + 4c_{4s}(0, 0, d-D) + 6c_{4s}(0, d-D, d-D) + \\
 & \quad 4c_{4s}(d-D, d-D, d-D) \tag{题 5.24.5}
 \end{aligned}$$

这说明  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  在集合  $\{0, d-D\}$  中取值, 并且至少有一个滞后等于  $d-D$ . 将这些滞后取值代入式 (题 5.24.3) 后, 易知式 (题 5.24.3) 可简化为

$$|f(i)| = |f(i+d-D)| \quad \text{或} \quad d = D \tag{题 5.24.6}$$

即不等式 (题 5.24.4) 的等号成立, 当且仅当式 (题 5.24.6) 满足.

将式 (题 5.24.4) 代入式 (题 5.24.5), 得

$$|\text{CUM}_4\{x(n-d) + y(n)\}| \leq 16|\gamma_{4e}| \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^4(i) \tag{题 5.24.7}$$

等号成立当且仅当式 (题 5.24.6) 满足.

利用题 5.23 中的式 (题 5.23.3) 和式 (题 5.23.4) 以及式 (题 5.24.7), 立即有

$$J_2(d) = \frac{|\text{CUM}_4\{x(n-d) + y(n)\}|}{16\sqrt{|\text{CUM}_4\{x(n)\}||\text{cum}_4\{y(n)\}|}} \leq 1$$

等号成立当且仅当式 (题 5.24.6) 成立. 又由于准则函数等于或大于零, 故我们有

$$0 \leq J_2(d) \leq 1$$

等号成立当且仅当  $d = D$  即式 (题 5.24.6) 成立. 这就完成了本习题的证明.

**题 5.25** 由于  $x_1, x_2$  的第一特征函数为

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_1^2\omega_1^2 + 2\mu\omega_1\omega_2 + \sigma_2^2\omega_2^2)\right] \tag{题 5.25.1}$$

故  $x_1$  和  $x_2$  的联合概率密度函数为

$$f(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \tag{题 5.25.2}$$

而特征函数关于  $\mu$  的各阶偏导分别为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(\omega_1, \omega_2)}{\partial \mu} &= -\omega_1 \omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \\ \frac{\partial^2 \Phi(\omega_1, \omega_2)}{\partial \mu^2} &= (-\omega_1 \omega_2)^2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \\ \frac{\partial^n \Phi(\omega_1, \omega_2)}{\partial \mu^n} &= (-\omega_1 \omega_2)^n \Phi(\omega_1, \omega_2)\end{aligned}\quad (\text{题 5.25.3})$$

利用式 (题 5.25.2) 和式 (题 5.25.3), 得

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^n E\{g(x_1, x_2)\}}{\partial \mu^n} \\ &= \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \right] dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \right] dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega_1 \omega_2)^n \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \right] dx_1 dx_2\end{aligned}\quad (\text{题 5.25.4})$$

但是, 由式 (题 5.25.2) 知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_1, \omega_2) (-j\omega_2) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_1, \omega_2) (-j\omega_2) (-j\omega_1) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_1, \omega_2) (-\omega_1 \omega_2) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2\end{aligned}$$

类似地, 得

$$\frac{\partial^{2n} f(x_1, x_2)}{\partial^n x_1 \partial^n x_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_1, \omega_2) (-\omega_1 \omega_2)^n e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (\text{题 5.25.5})$$

将式 (题 5.25.5) 代入式 (题 5.25.4) 的中括号内, 立即有

$$\frac{\partial^n E\{g(x_1, x_2)\}}{\partial \mu^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) \frac{\partial^{2n} f(x_1, x_2)}{\partial^n x_1 \partial^n x_2} dx_1 dx_2$$

这就完成了本习题的证明.

**题 5.26** 由于线性系统输出  $x(n)$  的功率谱为  $P_x(\omega) = \sigma_e^2 H(\omega)H^*(\omega)$  和双谱为  $B(\omega_1, \omega_2) = \gamma_{3e} H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1 + \omega_2)$ , 所以当令  $\omega_1 = \omega$  和  $\omega_2 = 0$  后, 即得下面的关系:

$$P_x(\omega) = \frac{B(\omega, 0)}{\gamma_{3e} H(0)/\sigma_e^2} = \alpha B(\omega, 0) \quad (\text{题 5.26.1})$$

式中  $\alpha = \sigma_e^2 / [\gamma_{3e} H(0)]$  为一常数.

另一方面, 在双谱的定义

$$B(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3e}(\tau, m) e^{-j(\omega_1 \tau + \omega_2 m)}$$

中令  $\omega_1 = \omega$  和  $\omega_2 = 0$ , 易知

$$B(\omega, 0) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3e}(\tau, m) \right] e^{-j\omega \tau}$$

这表明  $B(\omega, 0)$  是  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3e}(\tau, m)$  的 Fourier 变换, 即  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3e}(\tau, m)$  是  $B(\omega, 0)$  的 Fourier 反变换. 记住这一点, 对式 (题 5.26.1) 两边进行 Fourier 反变换, 即得到

$$R_x(\tau) = \alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3e}(\tau, m)$$

证毕.

## 第 6 章 时频信号分析——线性变换

本章首先总结信号局部变换的两种基本形式、解析信号和不相容原理。然后，围绕时频信号分析的线性变换，依次总结短时 Fourier 变换、临界采样和过采样的 Gabor 变换、小波变换与小波分析。

小波分析包含两个基本问题：小波的设计和小波变换的快速算法。从框架理论、多分辨分析和滤波器组理论三个角度，讨论小波的设计方法和快速小波变换的实现。

### 6.1 主要理论与方法

信号  $s(t)$  和其频谱  $S(\omega)$  构成 Fourier 变换对。由于 Fourier 变换或反变换都属全局变换，因此不能描述信号的局部统计特性。对于非平稳信号  $s(t)$ ，应该采用局部变换来描述其随时间变化的统计特性。

信号的局部变换有两种基本形式：

$$\text{信号 } s(t) \text{ 的局部变换} = (\text{取信号 } s(t) \text{ 的局部, 核函数无穷长}) \quad (6.1.1)$$

或

$$\text{信号 } s(t) \text{ 的局部变换} = (\text{取信号 } s(t) \text{ 的全部, 核函数局域化}) \quad (6.1.2)$$

#### 6.1.1 解析信号与瞬时物理量

##### 1. 实信号 $s(t)$ 的 Hilbert 变换

此变换定义为

$$\check{s}(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-u)h(u)du \quad (6.1.3)$$

Hilbert 变换具有以下性质：

性质 1 信号  $s(t)$  通过 Hilbert 变换器后，信号频谱的幅度不发生变化。

性质 2  $s(t) = -\mathcal{H}[\check{s}(t)]$ 。

性质 3 若  $x(t), x_1(t), x_2(t)$  的 Hilbert 变换分别为  $\tilde{x}(t), \tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)$ , 且  $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ , 则

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_1(t) * x_2(t) = x_1(t) * \tilde{x}_2(t)$$

性质 4  $s(t) = -\mathcal{H}^2[s(t)]$ , 其中  $\mathcal{H}^2[s(t)] = \mathcal{H}\{\mathcal{H}[s(t)]\}$ .

表 6.1.1 列出了一些典型信号及其 Hilbert 变换。

表 6.1.1 Hilbert 变换对

名称	函数	Hilbert 变换
常数	$a$	0
正弦	$\sin(\omega t)$	$-\cos(\omega t)$
余弦	$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$
指数	$e^{j\omega t}$	$-j\operatorname{sgn}(\omega)e^{j\omega t}$
方波脉冲	$p_a(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \ln \left  \frac{t+a}{t-a} \right $
双极性脉冲	$p_a(t)\operatorname{sgn}(t)$	$-\frac{1}{\pi} \ln \left  1 - \frac{a^2}{t^2} \right $
双三角	$tp_a(t)\operatorname{sgn}(t)$	$-\frac{1}{\pi} \ln \left  1 - \frac{a^2}{t^2} \right $
三角	$f(t) = \begin{cases} 1 - \left  \frac{t}{a} \right , &  t  \leq a \\ 0, &  t  > a \end{cases}$	$-\frac{1}{\pi} \left[ \ln \left  \frac{t-a}{t+a} \right  + \frac{t}{a} \left  \frac{t^2}{t^2 - a^2} \right  \right]$
Cauchy 脉冲	$\frac{a}{a^2 + t^2}$	$\frac{t}{a^2 + t^2}$
高斯脉冲	$e^{-\pi t^2}$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\omega^2} \sin(\omega t) d\omega$
对称指数	$e^{-a t }$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2a}{a^2 - \omega^2} \sin(\omega t) d\omega$
sinc	$\frac{\sin(at)}{at}$	$\frac{\sin^2(at/2)}{at/2} = \frac{1 - \cos(at)}{at}$
反对称指数	$\operatorname{sgn}(t)e^{-a t }$	$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2a}{a^2 - \omega^2} \cos(\omega t) d\omega$

## 2. 解析信号与基带信号 复信号

$$z(t) = s(t) + js(t) * h(t) \quad (6.1.4)$$

称为实信号  $s(t)$  的解析信号。解析信号的频谱表达式为

$$Z(f) = S(f) + jS(f)H(f) = S(f)[1 + jH(f)] \quad (6.1.5)$$

产生解析信号的 Hilbert 变换器的传递函数应满足

$$H(f) = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \quad (6.1.6)$$

$$= -j \operatorname{sgn}(f) \quad (6.1.7)$$

式中

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} +1, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases} \quad (6.1.8)$$

为符号函数。

对式 (6.1.7) 两边作 Fourier 反变换, 可得 Hilbert 变换器的冲激响应为

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df = \frac{1}{\pi t} \quad (6.1.9)$$

窄带实信号  $s(t) = a(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$  的解析信号为

$$s_A(t) = a(t)e^{j\phi(t)}e^{j2\pi f_c t} \quad (6.1.10)$$

而

$$s_B(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (6.1.11)$$

称为实信号  $s(t)$  的基带信号或零中频信号。

解析信号与基带信号存在以下关系:

$$s_A(t) = s_B(t)e^{j2\pi f_c t} \quad (6.1.12)$$

这表明: 基带信号  $s_B(t)$  就是解析信号  $s_A(t)$  的复包络, 它和  $s_A(t)$  一样是复信号。

### 3. 瞬时频率与群延迟

瞬时频率就是非平稳信号  $s(t)$  在各个时刻的频率, 定义为其解析信号  $z(t)$  的相位的导数, 即

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg z(t)] \quad (6.1.13)$$

多分量信号具有多个瞬时频率。

对于离散实信号  $s(n)$ ，其瞬时频率定义为

$$f_i(n) = \frac{f_s}{4\pi} \{ \arg[z(n+1)] - \arg[z(n-1)] \} \quad (6.1.14)$$

群延迟表示频谱  $Z(f)$  中频率为  $f$  的各个分量的延迟，定义为

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arg[Z(f)] \quad (6.1.15)$$

离散实信号的群延迟定义为

$$\tau_g(k) = \frac{1}{4\pi} \{ \arg[Z(k+1)] - \arg[Z(k-1)] \} \quad (6.1.16)$$

#### 4. 不相容原理

信号  $s(t)$  的平均时间  $\bar{t}_s$  和平均频率  $\bar{\omega}_s$  定义为

$$\bar{t}_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt \quad (6.1.17)$$

$$\bar{\omega}_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega \quad (6.1.18)$$

信号  $s(t)$  的有限宽度  $T_s$  和频谱的有限宽度  $B_s$  分别称为该信号的时宽和带宽，分别定义为<sup>[7]</sup>

$$T_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t}_s)^2 |s(t)|^2 dt \quad (6.1.19)$$

$$B_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega}_s)^2 |S(\omega)|^2 d\omega \quad (6.1.20)$$

而

$$\bar{T}_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} \quad (6.1.21)$$

$$\bar{B}_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega} \quad (6.1.22)$$

分别称为信号  $s(t)$  的有效时宽和有效带宽。

能量近似分布在时宽  $[-T/2, T/2]$  和带宽  $[-B/2, B/2]$  内的信号称为“有限能量信号”。

不相容原理：对于有限能量的任意信号  $s(t)$  或窗函数  $h(t)$ ，其时宽和带宽的乘积总是满足下面的不等式：

$$T_s B_s = \Delta t_s \Delta \omega_s \geq \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad T_h B_h = \Delta t_h \Delta \omega_h \geq \frac{1}{2} \quad (6.1.23)$$

不相容原理也称测不准原理或 Heisenberg 不等式。

### 6.1.2 短时 Fourier 变换

#### 1. 连续时间信号 $z(t)$ 的短时 Fourier 变换

令  $g(t)$  是一个时间宽度很短的窗函数，它沿时间轴滑动。于是，信号  $z(t)$  的连续短时 Fourier 变换 (缩写作 STFT) 定义为

$$\text{STFT}_z(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} [z(u)g^*(u-t)]e^{-j2\pi fu} du \quad (6.1.24)$$

式中 \* 代表共轭复数。

由于信号  $z(u)$  乘一个相当短的窗函数  $g(u-t)$  等价于取出信号在分析时间点  $t$  附近的一个切片，所以  $\text{STFT}_z(t, f)$  可以理解为信号  $z(t')$  在“分析时间”  $t$  附近的 Fourier 变换 (称之为“局部频谱”)。

连续短时 Fourier 变换具有以下基本性质：

性质 1 短时 Fourier 变换是一种线性时频表示。

性质 2 短时 Fourier 变换具有频移不变性，即

$$\tilde{z}(t) = z(t)e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow \text{STFT}_{\tilde{z}}(t, f) = \text{STFT}_z(t, f - f_0) \quad (6.1.25)$$

但不具有时移不变性，即

$$\tilde{z}(t) = z(t - t_0) \rightarrow \text{STFT}_{\tilde{z}}(t, f) = \text{STFT}_z(t - t_0, f)e^{-j2\pi t_0 f} \quad (6.1.26)$$

因此不满足  $\text{STFT}_{\tilde{z}}(t, f) = \text{STFT}_z(t - t_0, f)$ 。

当窗函数  $g(t)$  和  $\gamma(t)$  满足完全重构条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)\gamma(t)dt = 1 \quad (6.1.27)$$

时，原信号  $z(t)$  可从短时 Fourier 变换完全重构，即

$$z(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}_z(t, f)\gamma(u-t)e^{j2\pi fu} dt df \quad (6.1.28)$$

特别地，当取  $\gamma(t) = g(t)$  时，上式称为短时 Fourier 反变换。

2. 离散时间信号  $z(n)$  的短时 Fourier 变换

$$\text{STFT}(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(k)g^*(kT - mT)e^{-j2\pi(nF)k} \quad (6.1.29)$$

其广义短时 Fourier 反变换公式为

$$z(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{STFT}(m, n)\gamma(kT - mT)e^{j2\pi(nF)k} \quad (6.1.30)$$

完全重构条件为

$$\frac{1}{F} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(kT + n\frac{1}{F} - mT\right)\gamma^*(kT - mT) = \delta(n), \quad \forall k \quad (6.1.31)$$

谱图定义为信号短时 Fourier 变换的模值平方, 即有

$$\text{SPEC}(t, \omega) = |\text{STFT}(t, \omega)|^2 \quad (6.1.32)$$

## 6.1.3 Gabor 变换

1. 连续时间信号  $\phi(t)$  的 Gabor 变换

信号  $\phi(t)$  的连续 Gabor 展开为

$$\phi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn}g_{mn}(t) \quad (6.1.33)$$

式中  $g_{mn}(t) = g(t - mT)e^{j2\pi nFt}$  为窗函数  $g(t)$  的平移 - 调制形式。

连续 Gabor 变换为

$$a_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\gamma^*(t - mT)e^{-j2\pi nFt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\gamma_{mn}^*(t) dt \quad (6.1.34)$$

式中  $\gamma_{mn}(t) = \gamma(t - mT)e^{j2\pi nFt}$ 。

## (1) 临界采样情况的 Gabor 变换

重构条件为

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mn}(t)\gamma_{mn}^*(t') = \delta(t - t') \quad (6.1.35)$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\gamma^*(t - mT)e^{-j2\pi nFt} dt = \delta(m)\delta(n) \quad (6.1.36)$$

典型的 Gabor 基函数取

$$g_{mn}(t) = g_T(t - mT)e^{j2\pi nFt} \quad (6.1.37)$$

式中  $g_T(t)$  为高斯函数, 即

$$g_T(t) = e^{-\pi(t/T)^2} \quad (6.1.38)$$

(2) 过采样情况的 Gabor 变换

令采样时间间隔  $T_1$  和采样频率间隔  $F_1$  满足过采样条件  $T_1 F_1 < 1$ , 定义虚拟采样时间间隔  $T_0$  和虚拟采样频率间隔  $F_0$  满足  $T_1 F_0 = 1$  和  $T_0 F_1 = 1$ , 则信号的完全重构条件为

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_1)\gamma^*(t - mT_1 + nT_0) = \frac{1}{T_0}\delta(n) \quad (\text{似正交条件}) \quad (6.1.39)$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\gamma^*(t - mT_0)e^{-j2\pi nF_0 t} = \frac{T_1}{T_0}\delta(m)\delta(n) \quad (\text{似双正交条件}) \quad (6.1.40)$$

2. 离散时间周期信号  $\tilde{\phi}(t)$  的 Gabor 变换

令离散时间的周期信号  $\tilde{\phi}(k)$  的周期为  $L$ , 即  $\tilde{\phi}(k) = \tilde{\phi}(k + L)$ , 则其离散 Gabor 展开定义为<sup>[47]</sup>

$$\tilde{\phi}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}_{mn} \tilde{g}(k - m\Delta_M) e^{j2\pi nk\Delta_N} \quad (6.1.41)$$

其中 Gabor 展开系数由离散 Gabor 变换确定为

$$\tilde{a}_{mn} = \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{\phi}(k) \tilde{\gamma}^*(k - m\Delta_M) e^{-j2\pi nk\Delta_N} \quad (6.1.42)$$

式中,  $\Delta_M$  和  $\Delta_N$  分别表示时间和频率采样间隔, 而  $M$  和  $N$  分别是时间和频率采样的样本个数。

(1) 临界采样情况的离散 Gabor 变换

在临界采样情况下, 选择  $M$  满足

$$L = MN \quad (6.1.43)$$

则离散 Gabor 展开与 Gabor 变换分别为

$$\tilde{\phi}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}_{mn} \tilde{g}_{mn}(k) \quad (6.1.44)$$

$$\tilde{a}_{mn} = \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{\phi}(k) \tilde{\gamma}_{mn}^*(k) \quad (6.1.45)$$

式中

$$\tilde{g}_{mn}(k) = \tilde{g}(k - mN) e^{j2\pi nk/N} \quad (6.1.46)$$

$$\tilde{\gamma}_{mn}(k) = \tilde{\gamma}(k - mN) e^{j2\pi nk/N} \quad (6.1.47)$$

并且  $\tilde{g}(k)$  是一周期 Gabor 基函数, 其周期为  $L$ , 即

$$\tilde{g}(k) = \sum_l \tilde{g}(k + lL) = \tilde{g}(k + L) \quad (6.1.48)$$

而  $\tilde{\gamma}(k)$  也是一周期序列, 它满足下面的双正交条件:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{L-1} [\tilde{g}(k + mN) e^{-j2\pi nk/N}] \tilde{\gamma}^*(k) &= \sum_{k=0}^{L-1} [\tilde{g}^*(k + mN) e^{j2\pi nk/N}] \tilde{\gamma}(k) \\ &= \delta(m) \delta(n) \end{aligned} \quad (6.1.49)$$

其中  $0 \leq m \leq M-1$  和  $0 \leq n \leq N-1$ .

(2) 过采样情况的离散 Gabor 变换

在过采样 ( $MN > L$ ) 情况下, 将离散时间的周期函数  $\tilde{\phi}(k)$  的周期  $L$  分解为

$$L = \bar{N}M = N\bar{M} \quad (6.1.50)$$

式中  $\bar{M}$  和  $\bar{N}$  分别是虚拟时间采样个数和虚拟采样频率个数, 并且  $\bar{N}, N, M, \bar{M}$  均为正整数.

周期信号的离散 Gabor 展开和 Gabor 变换分别为

$$\tilde{\phi}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}_{mn} \tilde{g}_{mn}(k) \quad (6.1.51)$$

$$\tilde{a}_{mn} = \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{\phi}(k) \tilde{\gamma}_{mn}^*(k) \quad (6.1.52)$$

式中

$$\tilde{g}_{mn}(k) = \tilde{g}(k - m\bar{N})e^{j2\pi nk/N} \quad (6.1.53)$$

$$\tilde{\gamma}_{mn}(k) = \tilde{\gamma}(k - m\bar{N})e^{j2\pi nk/N} \quad (6.1.54)$$

离散序列  $\tilde{g}(k)$  由式 (6.1.48) 定义, 它与  $\tilde{\gamma}(k)$  服从似双正交条件, 即

$$\sum_{k=0}^{L-1} [\tilde{g}^*(k + mN)e^{j2\pi nk/\bar{N}}] \tilde{\gamma}(k) = \frac{L}{MN} \delta(m)\delta(n) \quad (6.1.55)$$

其中  $0 \leq m \leq \bar{M} - 1$ ,  $0 \leq n \leq \bar{N} - 1$ .

#### 6.1.4 小波变换

平方可积函数  $s(t)$  的连续小波变换定义为

$$\text{WT}_s(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt = \langle s(t), \psi_{a,b}(t) \rangle, \quad a > 0 \quad (6.1.56)$$

其中, 小波变换的基函数  $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$  (乘以因子  $1/\sqrt{a}$  是为使变换结果归一化而引入的) 是窗函数  $\psi(t)$  的时间平移  $b$  和尺度伸缩  $a$  的结果. 常数  $a$  和  $b$  分别称为尺度参数和平移参数.

1. 小波应该满足的条件

(1) 容许条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (6.1.57)$$

这一条件将使函数  $\psi(t)$  符合“一小段波”的波形特征, 是小波必须具备的最低条件.

(2) 归一化条件

$$\|\psi(t)\|^2 = \langle \psi, \psi \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad (6.1.58)$$

此条件使小波具有单位能量.

(3) 完全重构条件 (或恒等分辨条件)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (6.1.59)$$

(4) 小波  $\psi(t)$  的 Fourier 变换满足“稳定性条件”

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Psi(2^j \omega)|^2 \leq B \quad (6.1.60)$$

式中  $0 < A \leq B < \infty$ .

2. 连续小波变换具有以下重要性质

性质 1 (线性) 一个多分量信号的小波变换等于各个分量的小波变换之和.

性质 2 (平移不变性) 若  $f(t) \leftrightarrow \text{WT}_f(a, b)$ , 则  $f(t - \tau) \leftrightarrow \text{WT}_f(a, b - \tau)$ .

性质 3 (伸缩共变性) 若  $f(t) \leftrightarrow \text{WT}_f(a, b)$ , 则  $f(ct) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} \text{WT}_f(ca, cb)$ , 其中  $c > 0$ .

性质 4 (自相似性) 对应于不同尺度参数  $a$  和不同平移参数  $b$  的连续小波变换之间是自相似的.

性质 5 (冗余性) 连续小波变换中存在信息表述的冗余度.

3. 对偶小波

若小波  $\psi(t)$  满足稳定性条件 (6.1.60), 则存在一个“对偶小波”  $\tilde{\psi}(t)$ , 其 Fourier 变换  $\tilde{\Psi}(\omega)$  由下式给出:

$$\tilde{\Psi}(\omega) = \frac{\Psi^*(\omega)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Psi(2^j \omega)|^2} \quad (6.1.61)$$

### 6.1.5 小波分析

任何一个平方可积分的实函数  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  都具有一个小波级数表达式, 为

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad (6.1.62)$$

式中, 小波系数  $\{c_{j,k}\}$  定义为

$$c_{j,k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{WT}_f(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (6.1.63)$$

它是平方可求和的序列, 即

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}|^2 < \infty \quad (6.1.64)$$

基函数  $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$  称为小波基函数  $\psi_{j,k}(t)$  的对偶基, 定义为

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t) = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (6.1.65)$$

式中  $\tilde{\psi}(t)$  是小波  $\psi(t)$  的对偶小波.

### 1. 标准正交基

令  $H$  是一完备的内积空间即 Hilbert 空间, 离散序列族  $\{\phi_n(t) : n \in Z\}$  (其中  $Z$  为整数域) 称为  $H$  内的标准正交基或 Hilbert 基, 若满足下面条件:

- (1) 正交性: 若  $m, n \in Z$  和  $m \neq n$ , 则  $\langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0$ ;
- (2) 归一化: 对每个  $n \in Z$  有  $\|\phi_n\| = 1$ ;
- (3) 完备性: 若  $f \in H$  和  $\langle f, \phi_n \rangle = 0, \forall n \in Z$ , 则  $f = 0$ .

小波变换作为一种有用的信号处理工具, 必须具备三个基本要求:

(1) 小波是一般函数的积木块: 小波能够作为基函数, 对一般函数进行小波级数展开。

(2) 小波具有时频聚集性: 通常, 要求小波的大部分能量聚集在一个有限的区间内。理想情况下, 在该区间外, 小波函数  $\psi(t)$  的能量应等于零, 即小波在频域应该是紧支撑函数。但由不相容原理知, 一个在频域紧支撑的函数, 它在时域的支撑区将是无穷的。因此, 小波函数应该在时域是紧支撑的, 在频域能够快速衰减。

(3) 小波具有快速变换算法: 为了使小波函数易于计算机实现, 希望小波变换和 Fourier 变换一样有快速算法。

一个小波函数向高频率的衰减对应为该小波的光滑性。

### 2. $N$ 阶消失矩的定义

称小波  $\psi(t)$  具有  $N$  阶消失矩, 若

$$\int (t - t_0)^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.1.66)$$

$$\int (t - t_0)^N \psi(t) dt \neq 0 \quad (6.1.67)$$

消失矩决定函数的光滑性。如果  $\psi(t)$  在零点  $t_0 = 0$  具有  $N$  阶消失矩, 则其 Fourier 变换  $\Psi(\omega)$  在零点  $\omega = 0$  是  $N$  次可微分的, 并且  $\Psi^{(k)}(0) = 0$ , 其中  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ 。

### 3. 小波的性质

在实际应用中, 通常希望小波具有以下性质<sup>[18]</sup>:

(1) 紧支撑: 如果尺度函数和小波是紧支撑的, 则滤波器  $H$  和  $G$  就是有限冲激响应的滤波器, 它们在正交快速小波变换时的求和就是有限项的求和。这显然有利于实现。如果它们不是紧支撑的, 也希望它们是快速衰减的, 以使得滤波器  $H$  和  $G$  都可以用 FIR 滤波器合理近似。

(2) 对称性: 如果尺度函数和小波是对称的, 则滤波器就具有广义的线性相位。若滤波器不具有线性相位, 则信号通过滤波器后, 会发生相位的畸变。因此, 滤波器的线性相位要求在信号处理应用中是非常重要的。

(3) 光滑性: 小波的光滑性在压缩应用中起着重要的作用。令小的系数  $c_{j,k}$  为零, 再将这些小系数所对应的分量  $c_{j,k}\psi_{j,k}$  从原函数中除去, 我们就可以实现原函数的压缩。如果原函数表示一幅图像, 但小波不光滑, 则压缩图像的误差就很容易用肉眼看出。小波越光滑, 滤波器的频率局域性就越好。

(4) 正交性: 我们知道, 在信号的任何一种线性展开或逼近中, 正交基是最佳的基函数。因此, 当使用正交的尺度函数时, 能够提供最佳的信号逼近。

#### 4. 小波变换逼近函数的误差

此误差满足三角不等式, 即

$$|\langle f, \psi_a \rangle - f(t_0)| \leq \frac{2M}{N!} \left(\frac{R}{a}\right)^N \quad (6.1.68)$$

此三角不等式表明了以下重要事实:

(1) 小波变换逼近原信号  $f(t)$  的精度  $|\langle f, \psi_a \rangle - f(t_0)|$  取决于小波函数  $\psi(t)$  的支撑区  $R$  和尺度参数  $a$ 。一个函数的支撑指的是该函数定义域的闭区间。若它的支撑区是有限的闭区间 (这种支撑称为紧支撑), 则称该函数为紧支集函数。如果  $R$  为有限大即  $\psi(t)$  为紧支集函数, 则当尺度参数  $a \rightarrow \infty$  时, 式 (6.1.68) 变作  $|\langle f, \psi_a \rangle - f(t_0)| \rightarrow 0$ 。

(2) 当尺度参数  $a > R$  时, 若  $N$  值越大, 则小波变换逼近原信号  $f(t)$  的精度越高, 即  $|\langle f, \psi_a \rangle - f(t_0)|$  值越小。

从函数逼近的角度出发, 要求小波  $\psi(t)$  具有紧支撑和  $N$  阶消失矩, 并且  $R$  越小与 (或)  $N$  越大, 小波变换逼近信号的精度便越高。另一方面, 紧支集小波才有好的时间局域特性, 并且有利于算法实现。但是, 由不相容原理知, 时间局域特性与频率局域特性是一对矛盾, 从频率分辨率考虑, 又希望小波的时间支撑区大一些。

### 6.1.6 框架理论

在平方可求和空间即  $l^2(Z^2)$  空间的序列集合  $\{\psi_{mn}\}$  组成一框架, 若存在两个正的常数  $A$  和  $B$  ( $0 < A \leq B < \infty$ ) 使得下式对所有  $f(t) \in L^2(R)$  恒成立:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \psi_{mn} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (6.1.69)$$

式中  $\langle f, \psi_{mn} \rangle$  代表函数  $f(t)$  与  $\psi_{mn}(t)$  的内积, 且

$$\langle f, \psi_{mn} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{mn}^*(t)dt \quad (6.1.70)$$

正常数  $A$  和  $B$  分别称为框架的下边界和上边界。

令  $\{\psi_{mn}\}$  组成一框架。若  $B/A \approx 1$ , 则称  $\psi_{mn}$  为紧凑框架 (snug frame)。特别地, 当  $A = B$  时, 则称  $\psi_{mn}$  是紧致框架 (tight frame)。

若  $\{g_k(t)\}$  是具有  $A = B = 1$  的紧致框架, 并且所有框架元素都具有单位范数, 则框架  $\{g_k(t)\}$  为标准正交基.

若小波框架  $\{\psi_{mn}\}$  为独立序列的集合, 则称它为正合框架 (exact frame).

### 1. Riesz 基

在除去任何一个元素后不再是框架的意义上, 正合框架可理解为“正好合适的框架”. 在小波分析中, 正合框架常称为 Riesz 基.

若离散小波基函数族  $\{\psi_{j,k}(t) : j, k \in Z\}$  是线性独立的, 并且存在正的常数  $A$  和  $B$  ( $0 < A \leq B < \infty$ ), 使得

$$A\| \{c_{j,k}\} \|_2^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k} \psi_{j,k}|^2 \leq B\| \{c_{j,k}\} \|_2^2 \quad (6.1.71)$$

对于所有平方可求和的序列  $\{c_{j,k}\}$  恒成立, 其中

$$\| \{c_{j,k}\} \|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}|^2 < \infty \quad (6.1.72)$$

则称二维序列  $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in Z\}$  是  $L^2(R)$  内的一个 Riesz 基, 且常数  $A$  和  $B$  分别称为 Riesz 下界和上界. Riesz 基有时也称作无条件基.

### 2. 框架算子

令  $\{g_k, k \in K\}$  为一已知框架, 若

$$Tf = \sum_{k \in K} \langle f, g_k \rangle g_k \quad (6.1.73)$$

是一个将函数  $f \in L^2(R)$  映射为  $Tf \in L^2(R)$  的算子, 则称  $T$  为框架算子.

令  $\{g_k, k \in K\}$  组成框架, 则框架算子具有以下性质:

性质 1 框架算子  $T$  是有界的.

性质 2 框架算子  $T$  是自伴随的, 即  $\langle f, Th \rangle = \langle Tf, h \rangle$  对所有函数  $f$  和  $h$  成立.

性质 3 框架算子是正性算子, 即  $\langle f, Tf \rangle > 0$ .

性质 4 框架算子  $T$  是可逆的, 即  $T^{-1}$  存在.

### 3. 小波的分类

小波  $\psi(t) \in L^2(R)$  称为 Riesz 小波, 若由它按照  $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ ,  $j, k \in Z$  生成的离散函数族  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  为 Riesz 基.

根据是否正交, 小波可分为正交小波、半正交小波、非正交小波和双正交小波.

Riesz 小波  $\psi(t)$  称作正交小波, 若其生成的离散小波族  $\{\psi_{j,k}(t) : j, k \in Z\}$  满足正交性条件

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{mn} \rangle = \delta(j-m)\delta(k-n), \quad \forall j, k, m, n \in Z \quad (6.1.74)$$

Riesz 小波  $\psi(t)$  称为半正交小波, 若其生成的离散小波族  $\psi_{j,k}(t)$  满足“跨尺度正交性”

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{mn} \rangle = 0, \quad \forall j, k, m, n \in Z \text{ 但 } j \neq m \quad (6.1.75)$$

半正交小波可通过标准正交化运算变为正交小波。

Riesz 小波  $\psi(t)$  称为双正交小波, 若  $\psi(t)$  及其对偶小波  $\tilde{\psi}(t)$  生成的小波族  $\psi_{j,k}(t)$  和  $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$  是“双正交的” Riesz 基, 即

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{mn} \rangle = \delta(j-m)\delta(k-n), \quad \forall j, m, k, n \in Z \quad (6.1.76)$$

下面是几种典型的小波。

(1) Haar 小波

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6.1.77)$$

(2) 高斯小波

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} \quad (6.1.78)$$

这种小波是连续可微分的。其一阶导数为

$$\psi'(t) = -te^{-t^2/2}$$

(3) 墨西哥草帽小波

高斯小波的二阶导数, 即

$$\psi''(t) = (t^2 - 1)e^{-t^2/2} \quad (6.1.79)$$

因其波形酷似墨西哥草帽面称为墨西哥草帽小波。

(4) Gabor 小波

$$G(t) = g(t-b)e^{j\omega t} \quad (6.1.80)$$

(5) Morlet 小波

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}g\left(\frac{t-b}{a}\right)e^{j\omega t/a} \quad (6.1.81)$$

### 6.1.7 多分辨分析

令  $s(t)$  是一平方可积分函数, 即  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  意味着

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

#### 1. 多分辨分析的定义

空间  $L^2(\mathbb{R})$  内的多分辨 (或多尺度) 分析是指构造  $L^2(\mathbb{R})$  空间内的一个子空间列或链  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ , 使它具备以下性质:

##### (1) 包容性

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

或简写作  $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$ ;

##### (2) 逼近性 (递减性与递增性)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = L^2(\mathbb{R}) \quad \text{即} \quad \bigcup_{j < N} V_j = L^2(\mathbb{R}), \forall N \quad (\text{递减性})$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = 0 \quad \text{即} \quad \bigcap_{j > N} V_j = \{0\}, \forall N \quad (\text{递增性})$$

##### (3) 平移不变性

$$s(t) \in V_j \iff s(t-k) \in V_j, \forall k \in \mathbb{Z}$$

和伸缩性

$$s(t) \in V_j \iff s(2t) \in V_{j+1}$$

(4) Riesz 基存在性 存在一函数  $\phi(t) \in V_0$ , 其平移  $\{\phi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$  构成参考子空间  $V_0$  的 Riesz 基。

由于  $\phi(t)$  是小波多分辨 (或多尺度) 分析的生成元, 故称  $\phi(t)$  为尺度函数。

#### 2. 尺度函数的基本性质

(1) 尺度函数的容许条件  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$ 。

(2) 能量归一化条件  $\|\phi\|_2^2 = 1$ 。

(3) 尺度函数  $\phi(t)$  本身应该具有正交性, 即  $\langle \phi(t-l), \phi(t-k) \rangle = \delta(k-l), \forall k, l \in \mathbb{Z}$ 。

(4) 尺度函数  $\phi(t)$  与小波基函数  $\psi(t)$  正交, 即  $\langle \phi(t), \psi(t) \rangle = 0$ 。

(5) 跨尺度的尺度函数  $\phi(t)$  和  $\phi(2t)$  满足双尺度方程 (也称伸缩方程、细化方程)

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \phi(2t-k) \quad (6.1.82)$$

式中  $h(k)$  是生成尺度函数的滤波器  $H(\omega)$  的冲激响应。

(6) 基小波  $\psi(t)$  与尺度函数  $\phi(2t)$  相关, 即满足小波函数的双尺度方程

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\phi(2t-k) \quad (6.1.83)$$

式中  $g(k)$  是生成小波函数的滤波器  $G(\omega)$  的冲激响应。

(7) 尺度函数和它的整数时间平移服从单位分解

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t-k) = 1, \quad \forall t \in R \quad (6.1.84)$$

### 6.1.8 正交滤波器组

#### 1. 正交多分辨分析

若小波子空间  $W_j$  定义为  $V_j$  在  $V_{j+1}$  里的正交补, 则所有小波子空间  $W_j, j \in Z$  都相互正交, 它们的投影也相互正交。具有这样一种小波子空间的多分辨分析称为正交多分辨分析。

为使一多分辨分析是正交多分辨分析, 其充分必要条件是

$$W_j \perp V_j, \quad \forall j \in Z \quad (6.1.85)$$

用文字叙述为: 子空间  $W_j$  与  $V_j$  正交对所有  $j \in Z$  均成立。这时, 称  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  为正交分解。在这个意义上,  $V_j$  和  $W_j$  二者都是  $V_{j+1}$  的互补子空间, 因此常称  $W_j$  是  $V_j$  在  $V_{j+1}$  上的正交补 (空间)。

标准正交尺度函数的构造定理<sup>[26]</sup> 令  $V_j$  (其中  $j \in Z$ ) 是  $L^2$  空间的一多分辨逼近, 则存在一个标准正交函数  $\phi(t) \in V_0$  使得

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k), \quad k \in Z \quad (6.1.86)$$

必定是  $V_j$  内的一个标准正交基, 其中  $\phi(t)$  为多分辨分析的尺度函数。

#### 2. 正交小波的产生

先构造滤波器

$$\Psi(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{k=2}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

再求其 Fourier 反变换, 即得小波函数  $\psi(t)$ 。

(标准) 正交小波的构造决定于正交滤波器组  $(H, G)$  的设计, 其步骤如下:

- (1) 设计满足  $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$  的滤波器  $H(\omega)$ 。
- (2) 利用式  $G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi)$  直接计算滤波器  $G(\omega)$ 。

下面是几种著名的正交小波:

(1) Haar 小波

滤波器组  $(H, G)$  的设计要求:

$$H(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) \quad (6.1.87)$$

$$G(\omega) = -e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega}) \quad (6.1.88)$$

得到的尺度函数和小波函数分别为

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6.1.89)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6.1.90)$$

(2) Shannon 小波

$$\psi_{\text{Shannon}}(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi t} \quad (6.1.91)$$

Haar 小波和 Shannon 小波在实际中都较少使用, 因为 Haar 小波不光滑, 而 Shannon 小波虽然光滑, 但衰减很慢.

(3) Daubechies 小波

Daubechies [8] 提出构造 (标准) 正交小波的二步法:

- 先使用迭代方法构造尺度函数 (算法 6.1.1);
- 再构造 (标准) 正交小波 (算法 6.1.2).

算法 6.1.1 尺度函数的迭代构造算法

步骤 1 令初始值  $\phi^{(0)}(t) = p_{[0,1)}(t)$ , 其中

$$p_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

是定义在区间  $[0, 1)$  的矩形窗函数.

步骤 2 计算

$$\phi^{(i+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \phi^{(i)}(2t - k)$$

步骤 3 判断  $\phi^{(i)}(t)$  是否收敛, 若收敛, 则停止迭代; 否则, 令  $i \leftarrow i + 1$ , 并返回步骤 2 继续迭代, 直至算法收敛。

算法 6.1.2 Daubechies 标准正交小波构造算法

步骤 1 选择尺度滤波器  $H(\omega)$  的长度  $N$ 。

步骤 2 令

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^k + \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^N R \left( \frac{z+z^{-1}}{4} \right) \quad (6.1.92)$$

其中  $R(z)$  是一奇次阶多项式, 使得  $P(e^{j\omega})$  对所有  $\omega$  都是非负的。

步骤 3 将  $P(z)$  分解为  $P(z) = Q(z)Q(z^{-1})$ , 其中  $Q(z)$  是  $z$  的多项式。最常用的方法是取  $P(z)$  位于单位圆内的根组成多项式  $Q(z)$ 。

步骤 4 利用下式构造尺度滤波器:

$$H(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-j\omega}}{2} \right)^M Q(e^{-j\omega})$$

式中  $Q(e^{-j\omega})$  是  $e^{-j\omega}$  的多项式, 取  $G(\omega) = -e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi)$  或  $g(k) = (-1)^k h^*(1-k)$ 。

步骤 5 使用算法 6.1.1 迭代构造尺度函数  $\phi(t)$ , 并利用下式构造小波函数:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \phi(2t - k)$$

表 6.1.2 列出了 Daubechies 正交小波所使用的 4, 6, 8 阶尺度滤波器  $H(\omega)$  的冲激响应系数。

### 3. 快速正交小波变换与反变换

快速正交小波变换算法 (Mallat 塔式分解算法) 为

$$c_{j-1,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(m-2k) c_{j,m} \quad (6.1.93)$$

$$d_{j-1,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g^*(m-2k) d_{j,m} \quad (6.1.94)$$

或写成向量形式:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_{j-1} = \mathbf{H} \mathbf{c}_j \\ \mathbf{d}_{j-1} = \mathbf{G} \mathbf{d}_j \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (6.1.95)$$

表 6.1.2 Daubechies 正交小波的低通滤波器系数 [33]

$N$	$n$	$h(n)$	$N$	$n$	$h(n)$	$N$	$n$	$h(n)$
4	0	0.482962913145	6	0	0.332670552950	8	0	0.230377813309
	1	0.836516303738		1	0.806891509311		1	0.714846570553
	2	0.224143868042		2	0.459877502118		2	0.630880767930
	3	-0.129409522551		3	-0.135011020010		3	-0.027983769417
		4		-0.085441273882	4		-0.187034811719	
			5	0.035226291882	5		0.030841381836	
					6		0.032883011667	
					7		-0.010597401785	

式中,  $c_j = [c_{j,k}]_{k=-\infty}^{\infty}$  和  $d_j = [d_{j,k}]_{k=-\infty}^{\infty}$  为无穷维向量, 且  $H = [H_{m,k}]_{m,k=-\infty}^{\infty}$  和  $G = [G_{m,k}]_{m,k=-\infty}^{\infty}$  为无穷维矩阵, 其中  $H_{m,k} = h^*(m - 2k)$ , 且  $G_{m,k} = g^*(m - 2k)$ .

快速正交小波反变换算法 (Mallat 塔式综合算法) 为

$$c_{j,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m - 2k)c_{j-1,m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m - 2k)d_{j-1,m} \quad (6.1.96)$$

或写成向量形式:

$$c_j = H^*c_{j-1} + G^*d_{j-1}, \quad j = J, \dots, 1, 0 \quad (6.1.97)$$

式中  $H^*$  和  $G^*$  分别是  $H$  和  $G$  的共轭矩阵.

图 6.1.1 为快速正交小波变换与反变换算法的示意图.

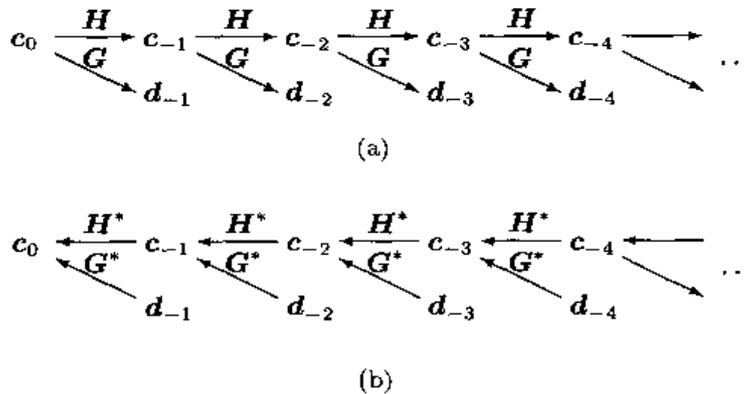


图 6.1.1 快速正交小波变换算法 (a) 和反变换算法 (b)

### 6.1.9 双正交滤波器组

使用双正交尺度函数和双正交小波函数的多分辨分析称为双正交多分辨分析。双正交多分辨分析使用两个滤波器组  $(H, G)$  和  $(\tilde{H}, \tilde{G})$ 。其中, 滤波器  $\tilde{H}(\omega)$  是尺度滤波器  $H(\omega)$  的对偶尺度滤波器, 而滤波器  $\tilde{G}(\omega)$  是小波滤波器  $G(\omega)$  的对偶小波滤波器。

#### 1. 双正交多分辨分析

尺度滤波器  $H(\omega)$  生成的尺度函数  $\phi(t)$  和小波滤波器  $G(\omega)$  生成的小波函数  $\psi(t)$  组成的子空间分别称为尺度子空间  $V_j$  和小波子空间  $W_j$ ; 而对偶尺度滤波器  $\tilde{H}(\omega)$  生成的对偶尺度函数  $\tilde{\phi}(t)$  和对偶小波滤波器  $\tilde{G}(\omega)$  生成的对偶小波函数  $\tilde{\psi}(t)$  组成的子空间分别称为对偶尺度子空间  $\tilde{V}_j$  和对偶小波子空间  $\tilde{W}_j$ 。其中, 小波子空间  $W_j$  是对偶尺度子空间  $\tilde{V}_j$  在  $\tilde{V}_{j+1}$  里的正交补, 而对偶小波子空间  $\tilde{W}_j$  则是尺度子空间  $V_j$  在  $V_{j+1}$  里的正交补 (空间), 即

$$\left. \begin{aligned} W_j &\perp \tilde{V}_j \\ \tilde{W}_j &\perp V_j \\ \tilde{W}_j &\perp W_{j'}, \quad \forall j \neq j' \end{aligned} \right\} \quad (6.1.98)$$

#### 2. 双正交滤波器组的定义

考虑滤波器组  $(A, B)$  及其对偶滤波器组  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ , 令

$$M = \begin{bmatrix} A(\omega) & A(\omega + \pi) \\ B(\omega) & B(\omega + \pi) \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\omega) & \tilde{A}(\omega + \pi) \\ \tilde{B}(\omega) & \tilde{B}(\omega + \pi) \end{bmatrix} \quad (6.1.99)$$

若

$$\tilde{M}^H M = I_2 \quad \text{或} \quad M^T \tilde{M}^* = I_2 \quad (6.1.100)$$

其中  $I_2$  为  $2 \times 2$  单位矩阵, 则称  $(A, B)$  和  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  为双正交滤波器组。

滤波器组  $(H, G)$  和  $(\tilde{H}, \tilde{G})$  满足上述定义, 所以它们是双正交滤波器组。

#### 3. 双正交滤波器组的设计

(1) 先确定满足下式的滤波器  $H(z)$  和  $\tilde{H}(z)$ :

$$H(z)\tilde{H}(z^{-1}) + H(-z)\tilde{H}(-z^{-1}) = 1$$

(2) 利用

$$G(z) = z^{-1}\tilde{H}(-z^{-1}), \quad \tilde{G}(z) = z^{-1}H(-z^{-1})$$

或

$$G(\omega) = e^{-j\omega} \tilde{H}^*(\omega + \pi), \quad \tilde{G}(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi)$$

设计滤波器  $G(z)$  和  $\tilde{G}(z)$ 。

#### 4. 双正交小波设计

尺度函数  $\phi(x)$ 、对偶尺度函数  $\tilde{\phi}(x)$ 、小波函数  $\psi(x)$  和对偶小波函数  $\tilde{\psi}(x)$  的迭代构造算法:

$$\phi^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h(k) \phi^{(i-1)}(2x - k) \quad (6.1.101)$$

$$\tilde{\phi}^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{h}(k) \tilde{\phi}^{(i-1)}(2x - k) \quad (6.1.102)$$

$$\psi^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g^{(i)}(k) \phi^{(i)}(2x - k), \quad 2^{-i}k \leq x < 2^{-i}(k+1) \quad (6.1.103)$$

$$\tilde{\psi}^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{g}^{(i)}(k) \tilde{\phi}^{(i)}(2x - k), \quad 2^{-i}k \leq x < 2^{-i}(k+1) \quad (6.1.104)$$

在任何一步迭代过程中, 尺度函数和对偶尺度函数都是双正交的, 即有

$$\langle \phi^{(i)}(x - n), \tilde{\phi}^{(i)}(x - l) \rangle = \delta_{nl} \quad (6.1.105)$$

小波函数和对偶小波函数也是双正交的, 即

$$\langle \psi^{(i)}(x - n), \tilde{\psi}^{(i)}(x - l) \rangle = \delta_{nl} \quad (6.1.106)$$

#### 5. 快速双正交小波变换:

$$c_{j-1,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{h}(m - 2k) c_{j,m} \quad (6.1.107)$$

$$d_{j-1,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(m - 2k) c_{j,m} \quad (6.1.108)$$

或写成向量形式:

$$\mathbf{c}_{j-1} = \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{c}_j \quad (6.1.109)$$

$$\mathbf{d}_{j-1} = \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{c}_j \quad (6.1.110)$$

式中  $\mathbf{c}_j = [c_{j,k}]_{k=-\infty}^{\infty}$ ,  $\mathbf{d}_j = [d_{j,k}]_{k=-\infty}^{\infty}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{h}(m - 2k)]_{m,k=-\infty}^{\infty}$  和  $\tilde{\mathbf{G}} = [\tilde{g}(m - 2k)]_{m,k=-\infty}^{\infty}$ 。

## 6. 快速双正交小波反变换:

$$c_{j,m} = \sum_k c_{j-1,k} h(m-2k) + \sum_k d_{j-1,k} g(m-2k) \quad (6.1.111)$$

或写成向量形式:

$$c_j = Hc_{j-1} + Gd_{j-1} \quad (6.1.112)$$

式中  $c_j = [c_{j,m}]_{m=-\infty}^{\infty}$ ,  $d_j = [d_{j,m}]_{m=-\infty}^{\infty}$ ,  $H = [h(m-2k)]_{m,k=-\infty}^{\infty}$  和  $G = [g(m-2k)]_{m,k=-\infty}^{\infty}$ .

图 6.1.2 为快速双正交小波变换和反变换的示意图。

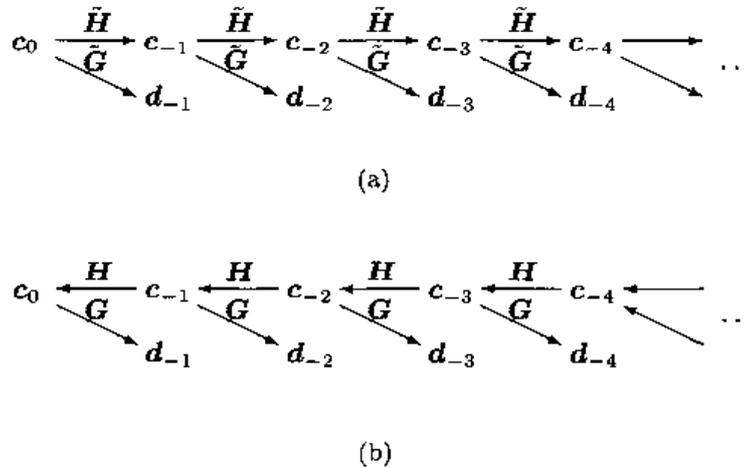


图 6.1.2 快速双正交小波变换算法 (a) 和反变换算法 (b)

使用正交信号变换和非正交信号变换时, 需要注意以下事项<sup>[3]</sup>。

正交信号变换的注意事项:

- (1) 信号的正交变换实际表示的是信号在某个时间段的逼近, 并且这些逼近不能用作外推或预测信号在这一时间段以外的值。
- (2) 当使用正交信号变换时, 要想得到有关输入信号源的先验信息是困难的, 而且往往是不可能的。
- (3) 若信号的真实分量彼此不正交, 则正交变换并不能够将信号分解为它们的真实分量。
- (4) 正交信号变换不适用于非规则采样的信号<sup>①</sup>。

<sup>①</sup> 均匀采样指等间隔的采样, 非均匀采样泛指非等间隔采样。但是, 非均匀采样既可以是按照某种规则作非均匀采样 (非均匀规则采样), 也可以是完全无规则的采样 (非规则采样)。

非正交信号变换的注意事项:

- (1) 如果信号变换使用一组正交的连续基函数,而这组基函数使用非规则采样进行数字化,则数字化后的信号变换为非正交信号变换。
- (2) 当观测时间间隔比信号的时间周期短时,信号变换必须采用非正交变换。
- (3) 伪周期信号的谱分析通常采用非正交信号变换。
- (4) 若信号的真实分量彼此不正交,则信号变换必须采用非正交变换。

## 6.2 习 题

**题 6.1** 求下列信号的瞬时频率  $\omega_i(t)$  和平均频率  $\bar{\omega}$ :

(1) 归一化的高斯信号

$$s(t) = g(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right), \quad \alpha > 0$$

(2) 具有高斯包络的线性调频信号

$$s(t) = g(t)e^{jmt^2}$$

**题 6.2** 令

$$F(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)\gamma^*(u-t)e^{-j\omega u} du$$

表示  $y(t)$  的短时 Fourier 变换。用  $y(t)$  和  $\gamma(t)$  的离散 Fourier 变换表示  $F(t, \omega)$ ，并利用这一表示说明为什么要求  $\gamma(t)$  是窄带函数。

**题 6.3** 试对短时 Fourier 变换的下列性质加以证明:

- (1) 短时 Fourier 变换是一种线性时频表示;
- (2) 短时 Fourier 变换具有频移不变性, 即

$$\tilde{z}(t) = z(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow \text{STFT}_{\tilde{z}}(t, \omega) = \text{STFT}_z(t, \omega - \omega_0)$$

**题 6.4** 令窗函数

$$g(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right)$$

求高斯信号

$$s(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)$$

的短时 Fourier 变换  $\text{STFT}_s(t, \omega)$ 。

**题 6.5** 证明信号  $z(t)$  可以利用短时 Fourier 反变换恢复或重构, 即

$$z(t) = \frac{1}{g^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}(t, f)e^{j2\pi ft} df$$

**题 6.6** 令  $e_1 = [1, 0]^T$  和  $e_2 = [0, 1]^T$ . 定义  $g_1 = e_1, g_2 = -0.5e_1 + 0.5\sqrt{3}e_2, g_3 = -0.5e_1 - 0.5\sqrt{3}e_2$ . 试问  $\{g_i, i = 1, 2, 3\}$  组成框架吗? 若不是, 请说明理由; 如果是, 那么它又是何种框架?

**题 6.7** 证明任何一个框架  $\{g_k, k \in K\}$  都是  $L_2$  空间的完备集合.

**题 6.8** 证明产生标准正交小波的滤波器  $G(\omega)$  满足条件

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1$$

**题 6.9** 令  $P$  是一概率测度, 其支撑区为  $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ . 已知一尺度函数的 Fourier 变换为

$$\Phi(\omega) = \left( \int_{\omega-\pi}^{\omega+\pi} dP \right)^{1/2}$$

它是一积分的非负平方根, 证明这一尺度函数是正交函数.

**题 6.10** 证明满足信号完全重构条件

$$\begin{aligned} H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) &= 1 \\ H(\omega)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) &= 0 \end{aligned}$$

的滤波器组  $(H, G)$  和对偶滤波器组  $(\tilde{H}, \tilde{G})$  是双正交滤波器组.

**题 6.11** 令  $\tilde{f}(t)$  是  $f(t)$  的双正交的对偶函数, 即

$$\langle f(t-n), \tilde{f}(n-k) \rangle = \delta(n-k)$$

并且  $F(\omega)$  和  $\tilde{F}(\omega)$  分别是  $f(t)$  和  $\tilde{f}(t)$  的 Fourier 变换. 证明

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2k\pi)\tilde{F}^*(\omega + 2k\pi) = 1, \quad \forall \omega$$

**题 6.12** 假设函数  $f(t)$  和  $\tilde{g}(t)$  满足双正交关系

$$\langle f(t-n), \tilde{g}(n-k) \rangle = 0, \quad \forall n, k \quad (\text{题 6.12.1})$$

函数  $\tilde{f}(t)$  和  $g(t)$  之间也存在以下双正交关系:

$$\langle \tilde{f}(t-n), g(n-k) \rangle = 0, \quad \forall n, k \quad (\text{题 6.12.2})$$

证明这些函数的 Fourier 变换服从以下恒等式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2k\pi)\tilde{G}^*(\omega + 2k\pi) = 0, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.12.3})$$

和

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega + 2k\pi)\tilde{G}^*(\omega + 2k\pi) = 0, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.12.4})$$

**题 6.13** 令尺度函数、对偶尺度函数、小波函数、对偶小波函数满足以下双正交关系:

$$\langle \phi(t-n), \tilde{\phi}(t-k) \rangle = \delta(n-k) \quad (\text{题 6.13.1})$$

$$\langle \psi(t-n), \tilde{\psi}(t-k) \rangle = \delta(n-k) \quad (\text{题 6.13.2})$$

$$\langle \phi(t-n), \tilde{\psi}(t-k) \rangle = 0 \quad (\text{题 6.13.3})$$

$$\langle \psi(t-n), \tilde{\phi}(t-k) \rangle = 0 \quad (\text{题 6.13.4})$$

证明分析滤波器组  $(\tilde{H}, \tilde{G})$  和综合滤波器组  $(H, G)$  满足完全重构条件, 即

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) = 1 \quad (\text{题 6.13.5})$$

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 0 \quad (\text{题 6.13.6})$$

**题 6.14** 证明尺度函数  $\phi(t)$  的双尺度方程若改写为  $\phi_{jk}(t)$  的方程, 则有

$$\phi_{jk}(t) = \sum_l h(l-2k)\phi_{j+1,l}(t)$$

**题 6.15** 证明尺度函数  $\phi(2t)$  可以用尺度函数  $\phi(t)$  和小波函数  $\psi(t)$  展开成两个级数之和, 即

$$\phi(2t-k) = \sum_l \tilde{h}(k-2l)\phi(t-l) + \sum_l \tilde{g}(k-2l)\psi(t-l)$$

**题 6.16** 令低通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 6.16.1})$$

并且

$$G(\omega) = -e^{-j\omega}H^*(\omega + \pi) \quad (\text{题 6.16.2})$$

试求由  $G(\omega)$  产生的小波函数  $\psi(t)$ .

**题 6.17** 令

$$H_{\text{Zak}}(t, f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-k)e^{-j2\pi kf}$$

是函数  $h(t)$  的 Zak 变换,  $n$  是一个任意整数. 求  $H_{\text{Zak}}(t-n, f)$  与  $H_{\text{Zak}}(t, f)$  之间的关系.

**题 6.18** 令  $g(t) = \sqrt{2\lambda}e^{-\lambda t}, t \geq 0$ . 证明  $g(t)$  的双正交函数  $\gamma(t)$  为

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}, & -1 \leq t < 0 \\ \frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

**题 6.19**<sup>[32]</sup> 令  $H_{\text{Zak}}(t, f)$  和  $G_{\text{Zak}}(t, f)$  分别是函数  $h(t)$  和  $g(t)$  的 Zak 变换. 已知

$$\langle h, g_{mn} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 H_{\text{Zak}}(t, f) G_{\text{Zak}}^*(t, f) e^{-j2\pi(mt-nf)} dt df$$

试从这一关系式出发, 推导下面的恒等式:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle h, g_{mn} \rangle|^2 = \int_0^1 \int_0^1 |H_{\text{Zak}}(t, f)|^2 |G_{\text{Zak}}(t, f)|^2 dt df$$

并利用上述恒等式证明  $\{g_{mn}(t)\}$  为一框架, 当且仅当

$$A \leq |G_{\text{Zak}}(t, f)|^2 \leq B$$

在  $(t, f) \in [0, 1] \times [0, 1]$  几乎处处成立.

(提示: 使用 Poisson 求和公式.)

**题 6.20** 令

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g(t-m) e^{j2\pi nt}$$

是函数  $y(t)$  的 Gabor 展开, 试证明 Gabor 展开系数  $a_{mn}$  可以由

$$a_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{Y_{\text{Zak}}(t, f)}{G_{\text{Zak}}(t, f)} e^{-j2\pi(nt+mf)} dt df$$

确定, 式中  $Y_{\text{Zak}}(t, f)$  和  $G_{\text{Zak}}(t, f)$  分别是  $y(t)$  和  $h(t)$  的 Zak 变换.

**题 6.21** 令  $u_k$  和  $v_k$  是两个联合平稳的零均值随机过程,  $\check{u}_k$  和  $\check{v}_k$  分别是  $u_k$  和  $v_k$  的 Hilbert 变换, 证明

$$E\{u_k v_k\} = E\{\check{u}_k \check{v}_k\}$$

**题 6.22** 考查恒包络信号的干扰对消<sup>[12]</sup>。令  $x_k$  是滤波器  $w$  的实数输入, 其输出  $y_k = w^T x_k$  希望是一个恒包络信号。若  $z_k$  是实信号  $y_k$  的解析信号,  $b$  是恒包络信号的幅值。试设计 LMS 自适应算法, 使得代价函数

$$J = E\{(|z_k| - b)^2\}$$

为最小。

**题 6.23** 令  $g_k = [g_k(1), \dots, g_k(L)]^T$  表示第  $k$  个 Gabor 变换基 (即 Gabor 原子) 向量, 其元素

$$g_k(t) = \frac{1}{\sqrt{s_k}} g\left(\frac{t - u_k}{s_k}\right) e^{j\xi_k t}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{题 6.23.1})$$

式中  $s_k, u_k$  和  $\xi_k$  分别称为第  $k$  个 Gabor 原子的尺度参数、平移参数和 (频率) 调制参数。假定采用一个具有三层 (输入层、隐层和输出层) 结构的 BP 神经网络抽取这三个参数, 所构造的神经网络称为 Gabor 原子网络<sup>[38]</sup>。

令  $x_i$  是 Gabor 原子网络输入层的第  $i$  个输入信号向量, 其输出

$$\phi_{ik} = |\langle g_k, x_i \rangle| = \left| \int \frac{1}{\sqrt{s_k}} g\left(\frac{t - u_k}{s_k}\right) e^{j\xi_k t} x_i(t) dt \right| \quad (\text{题 6.23.2})$$

然后, 输入层的输出  $\phi_{ik}$  被输入层与隐层之间的权系数  $w_{kh}^{(1)}$  加权后, 作为隐层的输入, 即有

$$\text{net}_{ih}^{(1)} = \sum_{k=1}^K \phi_{ik} w_{kh}^{(1)}, \quad h = 1, 2, \dots, H \quad (\text{题 6.23.3})$$

式中  $\text{net}_{ih}^{(1)}$  表示当 Gabor 原子网络输入信号为  $x_i$  时, 隐层第  $h$  个节点的输入。假定隐层的作用函数采用 Sigmoid 函数

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (\text{题 6.23.4})$$

于是, 隐层第  $h$  个节点的输出为

$$o_{ih} = f\left(\text{net}_{ih}^{(1)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_{ih}^{(1)}}}, \quad h = 1, 2, \dots, H \quad (\text{题 6.23.5})$$

每个节点输出再被权系数  $w_{hm}^{(2)}$  加权, 作为输出层的输入, 即有

$$\text{net}_{im}^{(2)} = \sum_{h=1}^H o_{ih} w_{hm}^{(2)}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (\text{题 6.23.6})$$

由该输入激励式 (题 6.23.4) 所示的 Sigmoid 函数, 得到整个 Gabor 原子网络的输出为

$$y_{im} = f(\text{net}_{im}^{(2)}) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_{im}^{(2)}}}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (\text{题 6.23.7})$$

假定共有  $N$  组观测信号向量  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  可用于训练 Gabor 原子网络, 并使用最小均方误差 (MMSE) 作为 Gabor 原子参数三元组  $(s_k, u_k, \xi_k)$  的自适应更新准则, 其中均方误差定义为

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M (d_{im} - y_{im})^2 \quad (\text{题 6.23.8})$$

式中  $d_{im}$  代表对应于已知观测信号向量  $\mathbf{x}_i$  的期望输出。例如, 当  $\mathbf{x}_i$  是第  $l$  类目标信号, 而 Gabor 原子网络抽取第  $l$  类目标的特征参数  $(s_k, u_k, \xi_k)$  时, 则期望输出全部为 1; 而 Gabor 原子网络抽取其他类目标的特征参数时, 则期望输出全部为 0。

若 Gabor 原子  $g(t)$  取作高斯函数

$$g(t) = \sqrt[3]{2} e^{-\pi t^2} \quad (\text{题 6.23.9})$$

试分别求出参数  $s_k, u_k, \xi_k$  各自的自适应更新公式。

### 6.3 习题解答

**题 6.1** 用符号  $\phi_s(t)$  表示信号  $s(t)$  的相位, 即  $s(t) = a(t)e^{j\phi_s(t)}$ , 则信号  $s(t)$  的瞬时频率定义为

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi_s(t)}{dt} \quad (\text{题 6.1.1})$$

令

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \quad (\text{题 6.1.2})$$

表示信号的总能量, 则信号  $s(t)$  的平均频率定义为

$$\bar{\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega_i(t) |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i(t) |s(t)|^2 dt \quad (\text{题 6.1.3})$$

(1) 对于归一化高斯信号

$$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right)$$

其相位为零, 即  $\phi_s(t) = 0$ , 故由式 (题 6.1.1) 知, 归一化高斯信号的瞬时频率  $\omega_i(t) = \phi'_s(t) = 0, \forall t$ . 将  $\omega_i(t) = 0$  代入式 (题 6.1.3), 则归一化高斯信号的平均频率也等于零, 即  $\bar{\omega} = 0$ .

(2) 对于线性调频信号  $s(t) = g(t)e^{jmt^2}$ , 由于相位  $\phi_s(t) = mt^2$ , 所以瞬时频率

$$\omega_i(t) = \phi'_s(t) = 2mt$$

为了求信号的平均频率, 需要先计算其总能量

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)e^{jmt^2}|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) \right|^2 dt \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt \end{aligned}$$

查定积分表, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad a > 0 \quad (\text{题 6.1.4})$$

故

$$E = \frac{\sqrt{\alpha} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\alpha}} = 1$$

于是, 具有高斯包络的线性调频信号的平均频率为

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i(t) |s(t)|^2 dt \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2mt e^{-\alpha t^2} dt \\ &= m \sqrt{\frac{1}{\alpha \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} de^{-\alpha t^2} \\ &= m \sqrt{\frac{1}{\alpha \pi}} e^{-\alpha t^2} \Big|_{t=-\infty}^{\infty}, \quad \alpha > 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

答案:  $\omega_i(t) = 2mt$  和  $\bar{\omega} = 0$ .

**题 6.2** 令短时 Fourier 变换  $F(t, \omega)$  在网格点  $(mT, n\Omega)$  的取值为  $f_{mn}$ , 则

$$f_{mn} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \gamma^*(t - mT) e^{-jn\Omega t} dt \quad (\text{题 6.2.1})$$

于是,  $F(t, \omega)$  和  $f_{mn}$  组成下列 Fourier 变换对:

$$F(t, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{mn} e^{j(m\omega T - n\Omega t)} \quad (\text{题 6.2.2a})$$

$$f_{mn} = \frac{1}{T\Omega} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} F(t, \omega) e^{j(m\omega T - n\Omega t)} dt d\omega \quad (\text{题 6.2.2b})$$

类似地, 对  $y(t)$  和  $\gamma(t)$  也以  $T$  间隔采样, 并定义以下两组 Fourier 变换对:

$$Y(t, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(t + mT) e^{-jm\omega T} \quad (\text{题 6.2.3a})$$

$$y(t + mT) = \frac{1}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} Y(t, \omega) e^{jm\omega T} d\omega \quad (\text{题 6.2.3b})$$

和

$$\Gamma(t, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma(t + mT) e^{-jm\omega T} \quad (\text{题 6.2.4a})$$

$$\gamma(t + mT) = \frac{1}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \Gamma(t, \omega) e^{jm\omega T} d\omega \quad (\text{题 6.2.4b})$$

将式 (题 6.2.1) 代入式 (题 6.2.2a), 并利用 Poisson 求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}, \quad T\Omega = 2\pi$$

则

$$\begin{aligned} F(t, \omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(u) \gamma^*(u - mT) e^{-jm\omega T} \left[ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(m\Omega(t-u))} \right] du \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(u) \gamma^*(u - mT) e^{jm\omega T} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - u + nT) \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t + nT) \gamma^*[t + (n - m)T] e^{-jm\omega T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t + nT) e^{-jn\omega T} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \gamma^*(t + m'T) e^{-jm'\omega T} \end{aligned}$$

将式 (题 6.2.3a) 和式 (题 6.2.4a) 代入上式, 立即得到

$$F(t, \omega) = Y(t, \omega) \Gamma^*(t, \omega)$$

**答案:** 用  $y(t)$  和  $\gamma(t)$  的 Fourier 变换表示短时 Fourier 变换的公式为  $F(t, \omega) = Y(t, \omega) \Gamma^*(t, \omega)$ . 这一表示公式说明, 由于信号  $y(t)$  的带宽一般比较大, 所以为了使得  $F(t, \omega)$  能够表示  $y(t)$  的局域信息,  $\Gamma(t, \omega)$  必须具有窄的带宽, 即窗函数  $\gamma(t)$  必须是窄带函数.

**题 6.3** (1) 令  $z(t) = a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t)$ , 则

$$\begin{aligned} \text{STFT}_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 z_1(u) + a_2 z_2(u)] g^*(u - t) e^{-j\omega u} du \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} z_1(u) g^*(u - t) e^{-j\omega u} du + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} z_2(u) g^*(u - t) e^{-j\omega u} du \\ &= a_1 \text{STFT}_{z_1}(t, \omega) + a_2 \text{STFT}_{z_2}(t, \omega) \end{aligned}$$

由于短时 Fourier 变换服从线性叠加原理, 故它是一种线性时频表示.

(2) 计算  $z(t)$  的短时 Fourier 变换, 得

$$\begin{aligned}\text{STFT}_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(u) e^{j\omega_0 u} g^*(u-t) e^{-j\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(u) g^*(u-t) e^{-j(\omega-\omega_0)u} du \\ &= \text{STFT}_z(t, \omega - \omega_0)\end{aligned}$$

证毕.

**题 6.4** 根据短时 Fourier 变换的定义, 直接计算得

$$\begin{aligned}\text{STFT}(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(u) g^*(u-t) e^{-j\omega u} du \\ &= \frac{(\alpha\beta)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{2}u^2\right) \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(u-t)^2\right] \exp(-j\omega u) du \\ &= \frac{(\alpha\beta)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)u^2 + (\alpha t - j\omega)u - \frac{\alpha}{2}t^2\right] du\end{aligned}$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$$

中, 令

$$A = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \quad B = \frac{1}{2}(\alpha t - j\omega)u, \quad C = \frac{\alpha}{2}t^2$$

则得

$$\text{STFT}(t, \omega) = \left(\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}t^2 - \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\omega^2 - j\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\omega t\right] \quad (\text{题 6.4.1})$$

**答案:** 高斯信号

$$s(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)$$

的短时 Fourier 变换由式 (题 6.4.1) 给出.

**题 6.5** 根据短时 Fourier 变换, 容易求得短时 Fourier 反变换公式为

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}(t, f) e^{j2\pi ft} df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(u) g^*(t-u) e^{-j2\pi fu} du \right] e^{j2\pi ft} df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(u-t)} df \right) s(u) g^*(t-u) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-t) s(u) g^*(t-u) du \\
 &= s(t) g^*(0)
 \end{aligned}$$

故

$$s(t) = \frac{1}{g^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}(t, f) e^{j2\pi ft} df$$

证毕.

**题 6.6** 定义  $\phi = [\phi_1, \phi_2]^T$ , 则

$$\sum_{i=1}^3 |\langle \phi, g_i \rangle|^2 = |\langle \phi, g_1 \rangle|^2 + |\langle \phi, g_2 \rangle|^2 + |\langle \phi, g_3 \rangle|^2$$

式中

$$\begin{aligned}
 |\langle \phi, g_1 \rangle|^2 &= |\langle \phi, e_1 \rangle|^2 = \phi_1^2 \\
 |\langle \phi, g_2 \rangle|^2 &= |\langle \phi, -0.5e_1 + 0.5\sqrt{3}e_2 \rangle|^2 = (-0.5\phi_1 + 0.5\sqrt{3}\phi_2)^2 \\
 |\langle \phi, g_3 \rangle|^2 &= |\langle \phi, -0.5e_1 - 0.5\sqrt{3}e_2 \rangle|^2 = (-0.5\phi_1 - 0.5\sqrt{3}\phi_2)^2
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 \langle \phi, g_i \rangle^2 &= \phi_1^2 + (-0.5\phi_1 + 0.5\sqrt{3}\phi_2)^2 + (-0.5\phi_1 - 0.5\sqrt{3}\phi_2)^2 \\
 &= \frac{3}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)
 \end{aligned}$$

注意到  $|\langle \phi, \phi \rangle|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$ , 故有

$$\sum_{i=1}^3 \langle \phi, g_i \rangle^2 = \frac{3}{2} |\langle \phi, \phi \rangle|^2$$

**答案:**  $\{g_i, i = 1, 2, 3\}$  组成一紧致框架, 因为它的上边界和下边界相同, 都等于  $\frac{3}{2}$ .

**题 6.7** 由于  $\{g_k, k \in K\}$  是平方可积分函数, 即  $g_k \in L_2$ , 故由框架定义有

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in K} |\langle g_k, f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (\text{题 6.7.1})$$

式中  $0 < A \leq B$ . 若  $\langle g_k, f \rangle = 0, \forall k \in K$ , 则式 (题 6.7.1) 变成

$$A\|f\|^2 \leq 0 \leq B\|f\|^2$$

由于  $A > 0$ , 所以上式给出结果  $f = 0$ . 显然, 对于所有  $k \in K$  而言,  $\langle g_k, f \rangle = 0$  意味着  $f = 0$ , 故根据完备集合的定义知, 框架  $\{g_k, k \in K\}$  是  $L_2$  空间的完备集合. 证毕.

**题 6.8** 根据教材中命题 6.10.1 知, 标准正交小波  $\psi(t)$  的 Fourier 变换必满足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.8.1})$$

并且标准正交尺度函数  $\phi(t)$  的 Fourier 变换满足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.8.2})$$

和

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi[\omega + (2k+1)\pi]|^2 = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.8.3})$$

由于式 (题 6.8.1) 对任意  $\omega$  成立, 所以对  $2\omega$  自然也成立, 即有

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Psi(2\omega + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(\omega + k\pi)|^2 |\Phi(\omega + k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(\omega + 2k\pi)|^2 |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 + \\ &\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G[\omega + (2k+1)\pi]|^2 |\Phi[\omega + (2k+1)\pi]|^2 \\ &= |G(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi[\omega + (2k+1)\pi]|^2 \end{aligned} \quad (\text{题 6.8.4})$$

将式 (题 6.8.2) 和式 (题 6.8.3) 分别应用于式 (题 6.8.4) 的两个求和项, 立即得到关于滤波器  $G$  的重要关系式, 即

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1$$

证毕。

**题 6.9** 根据已知条件,  $\Phi(\omega)$  的支撑区为

$$\left[-\frac{\pi}{3} - \pi, \frac{\pi}{3} + \pi\right] = \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$$

由于

$$\sum_k |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_k \int_{\omega+(2k-1)\pi}^{\omega+(2k+1)\pi} dP = \int_{-\infty}^{\infty} dP = 1$$

所以  $\phi(t)$  是一正交的尺度函数. 式中利用了概率  $P$  的积分性质  $\int_{-\infty}^{\infty} dP = 1$ . 证毕。

**题 6.10** 根据双正交滤波器组的定义, 滤波器组  $(H, G)$  和对偶滤波器组  $(\tilde{H}, \tilde{G})$  必须满足

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) & \tilde{H}(\omega + \pi) \\ \tilde{G}(\omega) & \tilde{G}(\omega + \pi) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} H(\omega) & H(\omega + \pi) \\ G(\omega) & G(\omega + \pi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{H}^*(\omega) & \tilde{G}^*(\omega) \\ \tilde{H}^*(\omega + \pi) & \tilde{G}^*(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(\omega) & H(\omega + \pi) \\ G(\omega) & G(\omega + \pi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即需要证明

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) = 1 \quad (\text{题 6.10.1})$$

$$H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega) + G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega) = 0 \quad (\text{题 6.10.2})$$

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 0 \quad (\text{题 6.10.3})$$

$$H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 1 \quad (\text{题 6.10.4})$$

由题意知, 滤波器组  $(H, G)$  和对偶滤波器组  $(\tilde{H}, \tilde{G})$  满足信号完全重构条件 (题 6.10.1) 和式 (题 6.10.3), 因此只需证明式 (题 6.10.2) 和式 (题 6.10.4)。

令

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_k h(k)e^{-jk\omega}, & \tilde{H}(\omega) &= \sum_l \tilde{h}(l)e^{-jl\omega} \\ G(\omega) &= \sum_m g(m)e^{-jm\omega}, & \tilde{G}(\omega) &= \sum_n \tilde{g}(n)e^{-jn\omega} \end{aligned}$$

容易看出  $H(\omega + \pi) = \sum_k h(k)e^{-jk(\omega + \pi)} = \sum_k (-1)^k h(k)e^{-jk\omega}$ 。这意味着  $H(\omega + \pi)$  和  $H(\omega)$  的奇次项系数大小相同，但符号相反；而常数项和偶次项的系数则彼此相同。同理， $\tilde{H}^*(\omega + \pi)$  和  $\tilde{H}^*(\omega)$  的各项系数也有类似的关系。于是，我们有下面的结论：

(1)  $H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega)$  和  $H(\omega)\tilde{H}^*(\omega + \pi)$  具有完全相同的各项系数；

(2)  $H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega + \pi)$  和  $H(\omega)\tilde{H}^*(\omega)$  的奇次项系数大小相同，但符号相反；而常数项和偶次项的系数则彼此相同。

类似地，我们还有：

(3)  $G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega)$  和  $G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi)$  具有完全相同的各项系数；

(4)  $G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi)$  和  $G(\omega)\tilde{G}^*(\omega)$  的奇次项系数大小相同，但符号相反；而常数项和偶次项的系数则彼此相同。

由 (1) 及 (3) 知

$$\begin{aligned} H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega) + G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega) &= H(\omega)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

这就证明了式 (题 6.10.2)。

又由 (2) 和 (4) 知

$$H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi)$$

和

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega)$$

的奇次项系数大小相同，但符号相反；而常数项和偶数项的系数则彼此相同。由已知条件  $H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) = 1$  立即知

$$H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 1$$

即又证明了式 (题 6.10.4)。

这就完成了本题的所有证明。

**题 6.11** 由已知双正交条件和 Parseval 公式  $\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F_1(\omega), F_2(\omega) \rangle$ , 我们有

$$\begin{aligned} \delta(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \tilde{f}^*(t-n) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \tilde{F}^*(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} F(\omega + 2k\pi) \tilde{F}^*(\omega + 2k\pi) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2k\pi) \tilde{F}^*(\omega + 2k\pi) \right] e^{j\omega n} d\omega \end{aligned} \quad (\text{题 6.11.1})$$

式中依次使用了以下结果:

$$\begin{aligned} f(t) \leftrightarrow F(\omega) &\Rightarrow f(t-n) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega n} \\ \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} X(\omega + 2k\pi) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

注意到离散 Fourier 变换对  $\delta(n) \leftrightarrow 1$ , 故式 (题 6.11.1) 意味着

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2k\pi) \tilde{F}^*(\omega + 2k\pi) = 1, \quad \forall \omega$$

成立。证毕。

**题 6.12** 利用 Parseval 公式  $\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F_1(\omega), F_2(\omega) \rangle$  知, 当函数  $f(t)$  和  $\tilde{g}(t)$  满足双正交关系式 (题 6.12.1) 时, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \tilde{g}^*(t-n) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \tilde{G}^*(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} F(\omega + 2k\pi) \tilde{G}^*(\omega + 2k\pi) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2k\pi) \tilde{G}^*(\omega + 2k\pi) e^{j\omega n} d\omega, \quad \forall n \end{aligned}$$

由于上述 Fourier 反变换对于所有  $n$  均成立, 所以信号的频谱函数恒等于零, 即式 (题 6.12.3) 成立。

类似地, 当函数  $\tilde{f}(t)$  和  $g(t)$  满足双正交关系式 (题 6.12.2) 时, 则有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)g^*(t-n)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega)G^*(\omega)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega+2k\pi)G^*(\omega+2k\pi)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega+2k\pi)G^*(\omega+2k\pi) \right] e^{j\omega n}d\omega, \quad \forall n \end{aligned}$$

注意到上述 Fourier 反变换对于所有  $n$  均成立, 故知信号的频谱函数恒等于零, 即式 (题 6.12.4) 成立. 证毕.

**题 6.13** 下面分两步证明:

(1) 式 (题 6.13.5) 的证明

根据题 6.11 知, 尺度函数的双正交条件式 (题 6.13.1) 意味着

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega+2k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega+2k\pi) = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.7})$$

由于上式对任意  $\omega$  成立, 所以它对  $\omega+\pi$  和  $2\omega$  也分别成立, 即有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[\omega+(2k+1)\pi]\tilde{\Phi}^*[\omega+(2k+1)\pi] = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.8})$$

和

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(2\omega+2k\pi)\tilde{\Phi}^*(2\omega+2k\pi) = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.9})$$

将  $\Phi(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$  代入式 (题 6.13.9), 则有

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega+k\pi)\Phi(\omega+k\pi)\tilde{H}^*(\omega+k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega+k\pi) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega+2k\pi)\tilde{H}^*(\omega+2k\pi)\Phi(\omega+2k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega+2k\pi) + \\ &\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} H[\omega+(2k+1)\pi]\tilde{H}^*[\omega+(2k+1)\pi]\Phi[\omega+(2k+1)\pi]\tilde{\Phi}^*[\omega+(2k+1)\pi] \end{aligned}$$

整理后, 得

$$1 = H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega + 2k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega + 2k\pi) + \\ H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega + \pi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[\omega + (2k + 1)\pi]\tilde{\Phi}^*[\omega + (2k + 1)\pi] \quad (\text{题 6.13.10})$$

式中利用了  $H(\omega)$  和  $\tilde{H}(\omega)$  都是周期为  $2\pi$  的周期函数这一事实。将式 (题 6.13.7) 和 (题 6.13.8) 代入式 (题 6.13.10), 立即得

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) + H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega + \pi) = 1 \quad (\text{题 6.13.11})$$

另一方面, 根据题 6.11 知, 小波函数的双正交条件式 (题 6.13.2) 意味着

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi(\omega + 2k\pi)\tilde{\Psi}^*(\omega + 2k\pi) = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.12})$$

由于上式对任意  $\omega$  成立, 所以它对  $\omega + \pi$  和  $2\omega$  也分别成立, 即有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi[\omega + (2k + 1)\pi]\tilde{\Psi}^*[\omega + (2k + 1)\pi] = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.13})$$

和

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi(2\omega + 2k\pi)\tilde{\Psi}^*(2\omega + 2k\pi) = 1, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.14})$$

将  $\Psi(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$  代入式 (题 6.13.14), 则有

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\omega + k\pi)\Phi(\omega + k\pi)\tilde{G}^*(\omega + k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega + k\pi) \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\omega + 2k\pi)\tilde{G}^*(\omega + 2k\pi)\Phi(\omega + 2k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega + 2k\pi) + \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} G[\omega + (2k + 1)\pi]\tilde{G}^*[\omega + (2k + 1)\pi]\Phi[\omega + (2k + 1)\pi]\tilde{\Phi}^*[\omega + (2k + 1)\pi] \\ = G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega + 2k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega + 2k\pi) + \\ G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[\omega + (2k + 1)\pi]\tilde{\Phi}^*[\omega + (2k + 1)\pi]$$

将式 (题 6.13.7) 和 (题 6.13.8) 代入上式, 立即得

$$G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) + G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 1 \quad (\text{题 6.13.15})$$

若选择

$$G(\omega) = e^{-j\omega}\tilde{H}(\omega + \pi) \quad (\text{题 6.13.16a})$$

$$\tilde{G}(\omega) = e^{-j\omega}H^*(\omega + \pi) \quad (\text{题 6.13.16b})$$

或

$$G(\omega) = -e^{-j\omega}\tilde{H}(\omega + \pi) \quad (\text{题 6.13.17a})$$

$$\tilde{G}(\omega) = -e^{-j\omega}H^*(\omega + \pi) \quad (\text{题 6.13.17b})$$

则有

$$G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) = H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega + \pi) \quad (\text{题 6.13.18a})$$

作变量代换  $\omega' = \omega + \pi$ , 并利用  $H(\omega + 2\pi) = H(\omega)$  和  $\tilde{H}(\omega + 2\pi) = \tilde{H}(\omega)$ , 则式 (题 6.13.18a) 变为

$$G(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) \quad (\text{题 6.13.18b})$$

将式 (题 6.13.18a) 代入式 (题 6.13.11) 即得式 (题 6.13.5), 而将式 (题 6.13.18b) 代入式 (题 6.13.15) 也得到式 (题 6.13.5). 这说明式 (题 6.13.11) 和式 (题 6.13.15) 二者是等价的.

(2) 式 (题 6.13.6) 的证明

根据题 6.12 知, 尺度函数  $\phi(t)$  与对偶小波函数的双正交关系式 (题 6.13.3) 意味着

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega + 2k\pi)\tilde{\Psi}^*(\omega + 2k\pi) = 0, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.19})$$

从而有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi[\omega + (2k + 1)\pi]\tilde{\Psi}^*[\omega + (2k + 1)\pi] = 0, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.20})$$

和

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(2\omega + 2k\pi)\tilde{\Psi}^*(2\omega + 2k\pi) = 0, \quad \forall \omega \quad (\text{题 6.13.21})$$

将  $\Phi(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$  和  $\tilde{\Psi}(\omega) = \tilde{G}\left(\frac{\omega}{2}\right)\tilde{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  代入式 (题 6.13.21) 后, 得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + k\pi)\Phi(\omega + k\pi)\tilde{G}^*(\omega + k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega + k\pi) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + 2k\pi)\tilde{G}^*(\omega + 2k\pi)\Phi(\omega + 2k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega + 2k\pi) + \\ &\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} H[\omega + (2k+1)\pi]\tilde{G}^*[\omega + (2k+1)\pi]\Phi[\omega + (2k+1)\pi]\tilde{\Phi}^*[\omega + (2k+1)\pi] \\ &= H(\omega)\tilde{G}^*(\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Phi(\omega + 2k\pi)\tilde{\Phi}^*(\omega + 2k\pi) + \\ &\quad H(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Phi[\omega + (2k+1)\pi]\tilde{\Phi}^*[\omega + (2k+1)\pi] \end{aligned}$$

将题 6.11 的结果代入上式右边两个求和项, 即有

$$H(\omega)\tilde{G}^*(\omega) + H(\omega + \pi)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 0$$

上式两边同乘  $G(\omega)$  得

$$H(\omega)G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) + H(\omega + \pi)G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 0$$

将式 (题 6.13.18a) 代入上式, 即得到

$$H(\omega)H(\omega + \pi)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + H(\omega + \pi)G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 0$$

两边同除以  $H(\omega + \pi)$ , 即得式 (题 6.13.6).

这就完成了本习题的全部证明.

**题 6.14** 尺度函数  $\phi(t)$  的双尺度方程为

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_l h(l)\phi(2t - l)$$

故有

$$\begin{aligned} \phi(t - k) &= \sqrt{2} \sum_l h(l)\phi(2t - 2k - l) \\ &= \sqrt{2} \sum_n h(n - 2k)\phi(2t - n) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\phi_{jk}(t) &= 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_l h(l - 2k) 2^{j/2} \phi(2^j \cdot 2t - l) \\ &= \sum_l h(l - 2k) 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1} t - l) \\ &= \sum_l h(l - 2k) \phi_{j+1,l}(t)\end{aligned}$$

证毕.

**题 6.15** 由多分辨分析理论知  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ , 而  $\phi(2t) \in V_1, \phi(t) \in V_0, \psi(t) \in W_0$ . 这表明, 尺度函数  $\phi(2t)$  可以用尺度子空间  $V_0$  的基函数  $\phi(t)$  和小波子空间  $W_0$  的基函数  $\psi(t)$  展开为两个级数之和, 即

$$\begin{aligned}c_{jk} &= \langle v_j, \psi_{jk} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_j(t) \psi_{jk}^*(t) dt \\ d_{j-1,k} &= \langle v_j, \tilde{\psi}_{j-1,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_j(t) \tilde{\phi}_{j-1,k}^*(t) dt\end{aligned}$$

证毕.

**题 6.16** 由已知条件式 (题 6.16.1) 知

$$H(\omega + \pi) = \begin{cases} 1, & |\omega + \pi| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

或

$$H(\omega + \pi) = \begin{cases} 1, & -\frac{3\pi}{2} < \omega < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将上式代入已知条件式 (题 6.16.2), 则有

$$G(\omega) = -e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi) = \begin{cases} -e^{-j\omega}, & -\frac{3\pi}{2} < \omega < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

或

$$G\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} -e^{-j\omega/2}, & -3\pi < \omega < -\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \cdot(\text{题 6.16.3})$$

另由式 (题 6.16.1) 知

$$H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2^{k-1}\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故

$$\Phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

或

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 6.16.4})$$

由式 (题 6.16.3) 和式 (题 6.16.4) 立即得小波滤波器

$$\Psi(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} e^{-j\omega/2}, & -2\pi \leq \omega \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 6.16.5})$$

于是, 由小波滤波器生成的小波函数为

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{-j\omega/2} e^{j\omega t} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi t} (e^{-j\pi t} + j e^{-j2\pi t}) \end{aligned}$$

答案: 产生的小波函数为复小波:

$$\psi(t) = -\frac{1}{2\pi t} (e^{-j\pi t} + j e^{-j2\pi t})$$

题 6.17 由 Zak 变换定义, 易知

$$\begin{aligned} H_{\text{Zak}}(t-n, f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-n-k) e^{-j2\pi k f} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(t-l) e^{-j2\pi(l-n)f} \\ &= e^{j2\pi n f} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-k) e^{-j2\pi k f} \\ &= e^{j2\pi n f} H_{\text{Zak}}(t, f) \end{aligned}$$

答案:  $H_{Zak}(t-n, f)$  与  $H_{Zak}(t, f)$  的关系为

$$H_{Zak}(t-n, f) = e^{j2\pi n f} H_{Zak}(t, f)$$

题 6.18 根据双正交的定义, 函数  $g(t)$  和  $\gamma(t)$  应该满足下面的双正交条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^*(t) g(t-m) e^{-j2\pi k t} dt = \delta(m) \delta(k)$$

上式两边同乘  $e^{-j2\pi f m}$ , 然后对  $m$  求和, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^*(t) G_{Zak}(t, f) e^{-j2\pi k t} dt = \delta(k)$$

两边同乘  $e^{j2\pi k \tau}$ , 并对  $k$  求和, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^*(t) G_{Zak}(t, f) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi k(t-\tau)} \right) dt = 1 \quad (\text{题 6.18.1})$$

利用 Poisson 求和公式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi k \alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha + k) \quad (\text{题 6.18.2})$$

式 (题 6.18.1) 可写作

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^*(t) G_{Zak}(t, f) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha + k) \right] dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^*(\tau - k) G_{Zak}(\tau - k, f) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{题 6.18.3})$$

由题 6.17 知

$$H_{Zak}(\tau - k, f) = e^{j2\pi f k} H_{Zak}(\tau, f) \quad (\text{题 6.18.4})$$

将式 (题 6.18.4) 代入式 (题 6.18.3), 得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^*(\tau - k) G_{Zak}(\tau, f) e^{j2\pi f k} = 1$$

即有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau - k) e^{-j2\pi f k} = \frac{1}{G_{Zak}^*(\tau, f)} \quad (\text{题 6.18.5})$$

这表明,  $\gamma(\tau - k)$  是 Zak 变换函数  $\frac{1}{G_{\text{Zak}}^*(\tau, f)}$  的 Fourier 反变换, 即

$$\gamma(\tau - k) = \int_0^1 \frac{1}{G_{\text{Zak}}^*(\tau, f)} e^{j2\pi f k} df \quad (\text{题 6.18.6})$$

特别地, 当  $\tau = t$  和  $k = 0$  时, 式 (题 6.18.6) 直接给出  $\gamma(t)$  的表达式为

$$\gamma(t) = \int_0^1 \frac{1}{G_{\text{Zak}}^*(t, f)} df \quad (\text{题 6.18.7})$$

由于  $g(t) = \sqrt{2\lambda}e^{-\lambda t}, t \geq 0$ , 故  $g(t)$  的 Zak 变换

$$\begin{aligned} G_{\text{Zak}}(t, f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - k) e^{-j2\pi f k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2\lambda} e^{-\lambda(t-k)} e^{-j2\pi f k} \\ &= \frac{\sqrt{2\lambda} \exp[-\lambda t + [t](\lambda - j2\pi f)]}{1 - \exp(-\lambda + j2\pi f)} \end{aligned} \quad (\text{题 6.18.8})$$

将式 (题 6.18.8) 代入式 (题 6.18.7), 则有

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \int_0^1 \frac{1 - \exp(-\lambda + j2\pi f)}{\sqrt{2\lambda} \exp[-\lambda t + [t](\lambda - j2\pi f)]} df \\ &= \begin{cases} -\frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}, & -1 \leq t < 0 \\ \frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{题 6.18.9})$$

这就完成了本习题的证明.

**题 6.19** 在

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle h, g_{mn} \rangle|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle h, g_{mn} \rangle \langle h, g_{mn} \rangle^*$$

中代入题给条件, 得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle h, g_{mn} \rangle|^2 \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 H_{Zak}(t, f) G_{Zak}^*(t, f) e^{-j2\pi(mt-nf)} dt df \times \\
 & \quad \int_0^1 \int_0^1 H_{Zak}^*(t', f') G_{Zak}(t', f') e^{j2\pi(mt'-nf')} dt' df' \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 H_{Zak}(t, f) G_{Zak}^*(t, f) H_{Zak}^*(t', f') G_{Zak}(t', f') \times \\
 & \quad \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi m(t'-t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n(f'-f)} \right) dt dt' df df' \quad (\text{题 6.19.1})
 \end{aligned}$$

在 Poisson 求和公式

$$\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi m \Omega t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t + mT), \quad T\Omega = 2\pi \quad (\text{题 6.19.2})$$

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n T f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f + n\Omega), \quad T\Omega = 2\pi \quad (\text{题 6.19.3})$$

中, 令  $T = 1$  和  $\Omega = 1$ , 然后将式 (题 6.19.2) 和式 (题 6.19.3) 代入式 (题 6.19.1) 中, 则有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle h, g_{mn} \rangle|^2 \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 H_{Zak}(t, f) G_{Zak}^*(t, f) H_{Zak}^*(t', f') G_{Zak}(t', f') \times \\
 & \quad \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t' - t + m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f' - f + n) \right] dt dt' df df' \quad (\text{题 6.19.4})
 \end{aligned}$$

由  $\delta$  函数的定义知, 上式不等于零的条件是有  $t = t' + m$  和  $f = f' + n$ . 然而, 由积分区间知,  $t, t'$  和  $f, f'$  的取值区间为  $[0, 1]$ , 故式 (题 6.19.4) 不等于零的条件等价于  $m = 0$  和  $n = 0$ , 或者写作  $t = t'$  和  $f = f'$ . 将这两个条件代入式 (题 6.19.4), 立即得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle h, g_{mn} \rangle|^2 = \int_0^1 \int_0^1 |H_{Zak}(t, f)|^2 |G_{Zak}(t, f)|^2 dt df \quad (\text{题 6.19.5})$$

这正是本习题需要推导的结果。

由 Cauchy-Schwartz 不等式和式 (题 6.19.5) 的积分区间知

$$|\langle h, g_{mn} \rangle|^2 = \left| \int_0^1 h(t) g_{mn}^*(t) dt \right|^2 \leq \int_0^1 |h(t)|^2 dt \int_0^1 |g_{mn}(t)|^2 dt \quad (\text{题 6.19.6})$$

进而有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle h, g_{mn} \rangle|^2 \leq \int_0^1 |h(t)|^2 dt \int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_{mn}(t)|^2 dt \quad (\text{题 6.19.7})$$

若

$$A \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_{mn}(t)|^2 \leq B \quad (\text{题 6.19.8})$$

则

$$A \leq \int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_{mn}(t)|^2 dt \leq B$$

因为  $\int_0^1 dt = 1$ . 于是, 式 (题 6.19.7) 变成

$$A \|h\|^2 \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle h, g_{mn} \rangle|^2 \leq B \|h\|^2 \quad (\text{题 6.19.9})$$

式中  $\|h\|^2 = \int_0^1 |h(t)|^2 dt = \int_0^1 h(t) h^*(t) dt$ .

式 (题 6.19.9) 表明, 离散序列  $\{g_{mn}(t)\}$  组成一个框架.

若式 (题 6.19.8) 的条件不满足, 例如  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_{mn}(t)|^2$  是下无界或者上无界的, 则式 (题 6.19.9) 不可能成立, 即离散序列  $\{g_{mn}(t)\}$  不组成一个框架. 因此, 当且仅当式 (题 6.19.8) 成立时, 离散序列  $\{g_{mn}(t)\}$  才组成一个框架. 这就完成了本习题的证明.

**题 6.20** 由  $y(t)$  的 Gabor 展开公式, 得

$$\begin{aligned} y(t-k)e^{-j2\pi kf} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g(t-k-m)e^{j2\pi nt} e^{-j2\pi kf} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g(t-k-m)e^{-j2\pi(k+m)f} e^{j2\pi(nt+mf)} \end{aligned}$$

两边对  $k$  求和, 并使用 Poisson 求和公式, 得

$$Y_{\text{Zak}}(t, f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} G_{\text{Zak}}(t, f) e^{j2\pi(nt+mf)}$$

或写作

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{j2\pi(nt+mf)} = \frac{Y_{Zak}(t, f)}{G_{Zak}(t, f)} \quad (\text{题 6.20.1})$$

注意到式左是  $a_{mn}$  在时频点  $(-2\pi t, -2\pi f)$  的二维 Fourier 变换, 故式 (题 6.20.1) 的二维 Fourier 反变换为

$$a_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{Y_{Zak}(t, f)}{G_{Zak}(t, f)} e^{-j2\pi(nt+mf)} dt df \quad (\text{题 6.20.2})$$

**题 6.21** 由式 (6.1.9) 知, Hilbert 变换器的冲激响应为

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{\pi t}$$

这表明, Hilbert 变换器的传递函数  $H(f)$  是时间函数  $\frac{1}{\pi t}$  的 Fourier 变换.

由于信号  $u_k$  和  $v_k$  的 Hilbert 变换分别为

$$\begin{aligned} \check{u}_k &= u_k * \frac{1}{\pi t} \\ \check{v}_k &= v_k * \frac{1}{\pi t} \end{aligned}$$

作 Fourier 变换后, 即有

$$\begin{aligned} \check{U}(f) &= U(f)H(f) \\ \check{V}(f) &= V(f)H(f) \end{aligned}$$

另一方面, 互功率谱为

$$\begin{aligned} P_{uv}(f) &= U(f)V^*(f) \\ P_{\check{u}\check{v}}(f) &= \check{U}(f)\check{V}^*(f) \end{aligned}$$

故有

$$P_{\check{u}\check{v}}(f) = U(f)V^*(f)|H(f)|^2 = |H(f)|^2 P_{uv}(f) \quad (\text{题 6.21.1})$$

即  $u_k$  和  $v_k$  的 Hilbert 变换  $\check{u}_k$  和  $\check{v}_k$  的互功率谱密度等于  $u_k$  和  $v_k$  的互功率谱密度与 Hilbert 变换器传递函数的模平方的乘积.

由于 Hilbert 变换器的传递函数  $H(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$  为符号函数, 所以  $|H(f)| = 1$ . 于是, 式 (题 6.21.1) 变为

$$P_{\check{u}\check{v}}(f) = P_{uv}(f) \quad (\text{题 6.21.2})$$

作 Fourier 反变换后, 得互协方差函数关系如下:

$$C_{\tilde{u}\tilde{v}}(\tau) = C_{uv}(\tau) \quad (\text{题 6.21.3})$$

由于  $u_k$  和  $v_k$  均为零均值, 所以它们之间的互协方差函数等于互相关函数。由于 Hilbert 变换为线性变换, 所以  $\tilde{u}_k$  和  $\tilde{v}_k$  之间的互协方差函数也与互相关函数等价, 故式 (题 6.21.3) 意味着

$$R_{\tilde{u}\tilde{v}}(\tau) = R_{uv}(\tau) \quad (\text{题 6.21.4})$$

即有

$$E\{\tilde{u}_k \tilde{v}_k\} = E\{u_k v_k\}$$

证毕。

**题 6.22<sup>[12]</sup>** 代价函数关于滤波器  $w$  的梯度为

$$\begin{aligned} \nabla_w J &= E\{2(|z_k| - b) \nabla_w |z_k|\} \\ &= E\left\{(|z_k| - b) \frac{\nabla_w |z_k|^2}{|z_k|}\right\} \end{aligned} \quad (\text{题 6.22.1})$$

令  $\check{y}_k$  和  $\check{x}_k$  分别是  $y_k$  和  $x_k$  的 Hilbert 变换, 则

$$\begin{aligned} \nabla_w J &= \nabla_w |y_k + j\check{y}_k|^2 \\ &= \nabla_w (|y_k|^2 + |\check{y}_k|^2) \\ &= \nabla_w (w^T x_k x_k^T w + w^T \check{x}_k \check{x}_k^T w) \\ &= 2x_k x_k^T w + 2\check{x}_k \check{x}_k^T w \\ &= 2y_k x_k + 2\check{y}_k \check{x}_k \end{aligned} \quad (\text{题 6.22.2})$$

将式 (题 6.22.2) 代入式 (题 6.22.1) 得真实梯度为

$$\nabla_w J = 2E\left\{\left(1 - \frac{b}{|z_k|}\right) (y_k x_k + \check{y}_k \check{x}_k)\right\} \quad (\text{题 6.22.3})$$

由题 6.21 知

$$E\{\check{y}_k \check{x}_k\} = E\{y_k x_k\} \quad (\text{题 6.22.4})$$

从这一关系出发, 我们来考虑真实梯度中的  $E\left\{\frac{\check{y}_k}{|z_k|} \check{x}_k\right\}$  项。

定义

$$g_k = \frac{y_k}{|z_k|} = \operatorname{Re} \left( \frac{z_k}{|z_k|} \right)$$

$$h_k = \frac{\tilde{y}_k}{|z_k|} = \operatorname{Im} \left( \frac{z_k}{|z_k|} \right)$$

这表明,  $h_k$  是  $g_k$  的 Hilbert 变换, 即  $h_k = \dot{g}_k$ . 也就是说,  $\frac{\tilde{y}_k}{|z_k|}$  是  $\frac{y_k}{|z_k|}$  的 Hilbert 变换. 再次利用题 6.21 知

$$E \left\{ \frac{\tilde{y}_k}{|z_k|} \tilde{x}_k \right\} = E \left\{ \frac{y_k}{|z_k|} x_k \right\} \quad (\text{题 6.22.5})$$

将式 (题 6.22.5) 代入式 (题 6.22.3), 则

$$\nabla_w J = 4 \left( 1 - E \left\{ \frac{y_k}{|z_k|} x_k \right\} \right) \quad (\text{题 6.22.6})$$

用瞬时梯度代替真实梯度, 立即得 LMS 自适应算法如下:

$$w_{k+1} = w_k - \mu \left( 1 - \frac{b}{|z_k|} \right) y_k x_k \quad (\text{题 6.22.7})$$

**答案:** 恒包络信号的干扰对消的 LMS 自适应算法为

$$w_{k+1} = w_k - \mu \left( 1 - \frac{b}{|z_k|} \right) y_k x_k$$

**题 6.23<sup>[38]</sup>** 由于采用的是最小均方误差准则, 所以尺度参数  $s_k$ 、平移参数  $u_k$  和频率调制参数  $\xi_k$  的自适应更新公式为梯度算法如下:

$$s_k(n+1) = s_k(n) - \mu_1 \frac{\partial E}{\partial s_k}$$

$$u_k(n+1) = u_k(n) - \mu_2 \frac{\partial E}{\partial u_k}$$

$$\xi_k(n+1) = \xi_k(n) - \mu_3 \frac{\partial E}{\partial \xi_k}$$

于是, 只要分别求出代价函数  $E$  相对于  $s_k, u_k, \xi_k$  的梯度或偏导数即可.

假定共有  $L$  类目标信号的观测样本向量. 在离散情况下, Gabor 原于网络各层

的计算如下:

$$\begin{aligned}\phi_{ik} &= |\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{x}_i \rangle| \\ &= \left| \sum_{l=1}^L \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2 / s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l) \right| \\ &= |\theta_{ik}| \end{aligned} \quad (\text{题 6.23.10})$$

$$\text{net}_{ih}^{(1)} = \sum_{k=1}^K \phi_{ik} w_{kh}^{(1)} \quad (\text{题 6.23.11})$$

$$o_{ih} = f(\text{net}_{ih}^{(1)}) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_{ih}^{(1)}}} \quad (\text{题 6.23.12})$$

$$\text{net}_{im}^{(2)} = \sum_{h=1}^H o_{ih} w_{hm}^{(2)} \quad (\text{题 6.23.13})$$

$$y_{im} = f(\text{net}_{im}^{(2)}) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_{im}^{(2)}}} \quad (\text{题 6.23.14})$$

式中

$$\theta_{ik} = \sum_{l=1}^L \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2 / s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l) \quad (\text{题 6.23.15})$$

将已知的均方误差公式 (题 6.23.8) 改写为

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad (\text{题 6.23.16})$$

式中

$$E_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (d_{im} - y_{im})^2 \quad (\text{题 6.23.17})$$

于是, 可求出  $E$  相对于  $u_k$  的偏导数为

$$\frac{\partial E}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial E_i}{\partial \phi_{ik}} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial u_k} \quad (\text{题 6.23.18})$$

式中第一项可以计算为

$$\frac{\partial E_i}{\partial \phi_{ik}} = \sum_{h=1}^H \frac{\partial E_i}{\partial \text{net}_{ih}^{(1)}} \frac{\partial \text{net}_{ih}^{(1)}}{\partial \phi_{ik}} \quad (\text{题 6.23.19})$$

注意到  $(\partial \text{net}_{ih}^{(1)}) / (\partial \phi_{ik}) = w_{kh}^{(1)}$ . 令

$$\delta_{ih}^{(1)} = -\frac{\partial E_i}{\partial \text{net}_{ih}^{(1)}} \quad (\text{题 6.23.20})$$

则式 (题 6.23.19) 和式 (题 6.23.18) 可分别重新写作

$$\frac{\partial E_i}{\partial \phi_{ik}} = - \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \quad (\text{题 6.23.21})$$

$$\frac{\partial E}{\partial u_k} = - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial u_k} \quad (\text{题 6.23.22})$$

类似地, 可以得到

$$\frac{\partial E}{\partial s_k} = - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial s_k} \quad (\text{题 6.23.23})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi_k} = - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \xi_k} \quad (\text{题 6.23.24})$$

另一方面, 式 (题 6.23.20) 可以具体计算为

$$\begin{aligned} \delta_{ih}^{(1)} &= - \frac{\partial E_i}{\partial \text{net}_{ih}^{(1)}} \\ &= - \frac{\partial E_i}{\partial o_{ih}} \frac{\partial o_{ih}}{\partial \text{net}_{ih}^{(1)}} \\ &= \left( - \sum_{m=1}^M \frac{\partial E_i}{\partial \text{net}_{im}^{(2)}} \frac{\partial \text{net}_{im}^{(2)}}{\partial o_{ih}} \right) [o_{ih}(1 - o_{ih})] \end{aligned} \quad (\text{题 6.23.25})$$

注意  $\frac{\partial \text{net}_{im}^{(2)}}{\partial o_{ih}} = w_{hm}^{(2)}$ . 若仿照式 (题 6.23.20) 定义

$$\delta_{im}^{(2)} = - \frac{\partial E_i}{\partial \text{net}_{im}^{(2)}} \quad (\text{题 6.23.26})$$

则式 (题 6.23.25) 可表示成

$$\delta_{ih}^{(1)} = \sum_{m=1}^M \delta_{im}^{(2)} w_{im}^{(2)} o_{ih} (1 - o_{ih}) \quad (\text{题 6.23.27})$$

下面求  $\delta_{im}^{(2)}$  的具体表达式. 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial \text{net}_{im}^{(2)}} &= \frac{\partial E_i}{\partial y_{im}} \frac{\partial y_{im}}{\partial \text{net}_{im}^{(2)}} \\ &= [-(d_{im} - y_{im})][y_{im}(1 - y_{im})] \end{aligned} \quad (\text{题 6.23.28})$$

将式 (题 6.23.28) 代入式 (题 6.23.26) 得

$$\delta_{im}^{(2)} = (d_{im} - y_{im})y_{im}(1 - y_{im}) \quad (\text{题 6.23.29})$$

现在, 式 (题 6.23.22) ~ 式 (题 6.23.24) 中的  $\delta_{ih}^{(1)}$  可以根据式 (题 6.23.27) 和式 (题 6.23.29) 计算出.

式 (题 6.23.10) 分别对  $u_k, s_k, \xi_k$  求偏导, 又有

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial u_k} = \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \sum_{l=1}^L \left[ \frac{2}{s_k^2} \pi(t_l - u_k) \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2 / s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l) \right] \quad (\text{题 6.23.30})$$

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial s_k} = \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \sum_{l=1}^L \left[ \left( -\frac{1}{2s_k} + \frac{2}{s_k^3} \pi(t_l - u_k)^2 \right) \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2 / s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l) \right] \quad (\text{题 6.23.31})$$

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \xi_k} = \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \sum_{l=1}^L \left[ -t_l \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2 / s_k^2} \sin(\xi_k t_l) x_i(t_l) \right] \quad (\text{题 6.23.32})$$

将式 (题 6.23.30) ~ 式 (题 6.23.32) 分别代入式 (题 6.23.22) ~ 式 (题 6.23.24), 立即会得到

$$\frac{\partial E}{\partial u_k} = - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \sum_{l=1}^L \left[ \frac{2}{s_k^2} \pi(t_l - u_k) \times \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2 / s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l) \right] \quad (\text{题 6.23.33})$$

和

$$\frac{\partial E}{\partial s_k} = - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \left\{ \sum_{l=1}^L \left[ -\frac{1}{2s_k} + \frac{2}{s_k^3} \pi(t_l - u_k)^2 \right] \times \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2 / s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l) \right\} \quad (\text{题 6.23.34})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi_k} = - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \times \sum_{l=1}^L \left[ -t_l \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2 / s_k^2} \sin(\xi_k t_l) x_i(t_l) \right] \quad (\text{题 6.23.35})$$

式中  $\theta_{ik}$  由式 (题 6.23.5) 确定.

**答案:** Gabor 原子网络抽取平移参数  $u_k$ 、尺度参数  $s_k$  和频率调制参数  $\xi_k$  的

自适应算法如下:

$$u_k(n+1) = u_k(n) - \mu_1 \frac{\partial E}{\partial u_k}$$

$$s_k(n+1) = s_k(n) - \mu_2 \frac{\partial E}{\partial s_k}$$

$$\xi_k(n+1) = \xi_k(n) - \mu_3 \frac{\partial E}{\partial \xi_k}$$

式中  $\frac{\partial E}{\partial u_k}$ ,  $\frac{\partial E}{\partial s_k}$  和  $\frac{\partial E}{\partial \xi_k}$  分别如式 (题 6.23.33) ~ 式 (题 6.23.35) 所示.



## 第 7 章 时频信号分析——非线性变换

本章首先重点复习时频分布之母——Wigner-Ville 分布，继而讨论它与模糊函数之间的关系，以及时频分布的统一形式——Cohen 类时频分布，它是 Wigner-Ville 分布的加窗形式。

时频分布性能的评价主要由时频聚集性和交叉项抑制决定，而后者成了时频分布研究及应用的重点和难点。通过选择不同的窗函数，可以得到各种改进的时频分布。复习各种时频分布，将有助于在应用中选择一种合适的时频分布。

本章的最后复习多项式调频信号的时频分析。特别地，作为时频信号分析和高阶统计分析相结合的产物，Wigner-Ville 分布的三谱是多项式调频信号的一种有力的分析工具。

### 7.1 主要理论与方法

尽管短时 Fourier 变换、Gabor 变换与小波变换这些线性时频表示能够有效描述非平稳信号的局域性能，但是当描述非平稳信号的能量变化时，二次型的时频分布却是一类更加直观和合理的信号表示方法。

#### 7.1.1 时频分布的一般理论

简单的二次型时频表示可以粗略地表示能量，例如谱图

$$\text{SPEC}(t, \omega) = |\text{STFT}(t, \omega)|^2$$

和尺度图

$$\text{SCAL}(a, b) = |\text{WT}(a, b)|^2$$

但是，谱图和尺度图对能量分布的描述是非常粗糙的，因为它们并不满足对能量分布更严格的要求。

## 1. 时变相关函数 (或称局部相关函数)

$$R(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u - t, \tau) z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du \quad (7.1.1)$$

式中  $\phi(t, \tau)$  为窗函数。

## 2. 时变功率谱

$$P(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.1.2)$$

## 3. 时频分布的基本性质要求

性质 1 时频分布必须是实的 (且希望是非负的)。

性质 2 时频分布关于时间  $t$  和  $\omega$  的积分应给出信号的总能量  $E$ , 即

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) dt d\omega = E \quad (7.1.3)$$

性质 3 边缘特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) dt = |Z(\omega)|^2 \quad \text{和} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) d\omega = |z(t)|^2 \quad (7.1.4)$$

即时频分布关于时间  $t$  和频率  $\omega$  的积分分别给出信号在频率  $\omega$  的谱密度和信号在  $t$  时刻的瞬时功率。

性质 4 时频分布的一阶矩给出信号的瞬时频率  $\omega_i(t)$  和群延迟  $\tau_g(\omega)$ , 即

$$\omega_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega P(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) d\omega} \quad \text{和} \quad \tau_g(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t P(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) dt} \quad (7.1.5)$$

性质 5 有限时间支撑

$$z(t) = 0 \quad (|t| > t_0) \Rightarrow P(t, \omega) = 0 \quad (|t| > t_0) \quad (7.1.6)$$

和有限频率支撑

$$Z(\omega) = 0 \quad (|\omega| > \omega_0) \Rightarrow P(t, \omega) = 0 \quad (|\omega| > \omega_0) \quad (7.1.7)$$

## 4. 二次叠加原理

若  $z(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ , 则任何二次型时频分布服从下面的二次叠加原理:

$$P_z(t, \omega) = |c_1|^2 P_{z_1}(t, \omega) + |c_2|^2 P_{z_2}(t, \omega) + c_1 c_2^* P_{z_1, z_2}(t, \omega) + c_2 c_1^* P_{z_2, z_1}(t, \omega) \quad (7.1.8)$$

式中  $P_z(t, \omega) = P_{z,z}(t, \omega)$  代表信号  $z(t)$  的“自时频分布” (简称“信号项”或“自项”), 它是  $z(t)$  的双线性函数; 而  $P_{z_1, z_2}(t, \omega)$  则表示信号分量  $z_1(t)$  和  $z_2(t)$  的“互时频分布” (简称“交叉项”), 它是  $z_1(t)$  和  $z_2(t)$  的双线性函数。交叉项通常相当于干扰。

对于  $p$  分量信号  $z(t) = \sum_{k=1}^p c_k z_k(t)$ , 有以下一般规则:

- (1) 每个信号分量  $c_k z_k(t)$  都有一个自 (时频分布) 分量即信号项  $|c_k|^2 P_{z_k}(t, \omega)$ ;
- (2) 每一对信号分量  $c_k z_k(t)$  和  $c_l z_l(t)$  (其中  $k \neq l$ ) 都有一个对应的互 (时频分布) 分量即交叉项  $c_k c_l^* P_{z_k, z_l}(t, \omega) + c_l c_k^* P_{z_l, z_k}(t, \omega)$ 。

### 7.1.2 Wigner-Ville 分布

定义瞬时相关函数

$$R_z(t, \tau) = z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (7.1.9)$$

则其关于滞后  $\tau$  的 Fourier 变换

$$W_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega}[k_z(t, \tau)] \quad (7.1.10)$$

称为信号  $z(t)$  的 Wigner-Ville 分布。

Wigner-Ville 分布也可以用信号频谱  $Z(\omega)$  定义为

$$W_Z(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) Z^*\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{j\nu t} d\nu \quad (7.1.11)$$

Wigner-Ville 分布是最早问世的时频分布, 其他时频分布都可以视为 Wigner-Ville 分布的改造或者变型, 故 Wigner-Ville 分布被称为“时频分布之母”。

时变自相关函数的 Fourier 变换称为演变谱, 定义为

$$\begin{aligned} S_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_z(t, \tau) e^{-j2\pi\tau f} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left\{ z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

信号  $z(t)$  的演变谱等于该信号的 Wigner-Ville 分布  $W_z(t, \omega)$  的数学期望, 即有

$$S_z(t, \omega) = \mathbb{E}\{W_z(t, \omega)\} \quad (7.1.13)$$

由于这一关系, 有时也将演变谱称作 Wigner-Ville 谱。

表 7.1.1 Wigner-Ville 分布的重要数学性质

P1 (实值性)	$W_z^*(t, \omega) = W_z(t, \omega)$
P2 (时移不变性)	$\bar{z}(t) = z(t - t_0) \Rightarrow W_{\bar{z}}(t, \omega) = W_z(t - t_0, \omega)$
P3 (频移不变性)	$\bar{z}(t) = z(t)e^{j\omega_0 t} \Rightarrow W_{\bar{z}}(t, \omega) = W_z(t, \omega - \omega_0)$
P4 (时间边缘特性)	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_z(t, \omega) d\omega =  z(t) ^2$
P5 (频率边缘特性)	$\int_{-\infty}^{\infty} W_z(t, \omega) dt =  Z(\omega) ^2$
P6 (瞬时频率)	$\omega_z(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t W_z(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} W_z(t, \omega) d\omega}$
P7 (群延迟)	$\tau_g(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t W_z(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} W_z(t, \omega) dt}$
P8 (有限时间支撑)	$z(t) = 0 (t \notin [t_1, t_2]) \Rightarrow W_z(t, \omega) = 0 (t \notin [t_1, t_2])$
P9 (有限频率支撑)	$Z(\omega) = 0 (\omega \notin [\omega_1, \omega_2]) \Rightarrow W_z(t, \omega) = 0 (\omega \notin [\omega_1, \omega_2])$
P10 (Moyal 公式)	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) W_y(t, \omega) d\omega =  \langle x, y \rangle ^2$
P11 (卷积性)	$\bar{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(u) h(t - u) du \Rightarrow W_{\bar{z}}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_z(u, \omega) W_h(t - u, \omega) du$
P12 (乘积性)	$\bar{z}(t) = z(t) h(t) \Rightarrow W_{\bar{z}}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_z(t, \nu) W_h(t, \omega - \nu) d\nu$
P13 (Fourier 变换性)	$W_Z(\omega, t) = 2\pi W_z(t, -\omega)$

### 7.1.3 模糊函数

在雷达信号处理中, 模糊函数定义为局部相关函数关于时间  $t$  的 Fourier 变换, 即

$$A_z(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\nu t} dt \quad (7.1.14)$$

在一般文献中, 模糊函数定义为局部相关函数关于时间  $t$  的 Fourier 反变换, 即

$$A_z(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\nu t} dt \quad (7.1.15)$$

模糊函数也可以用信号的 Fourier 变换  $Z(\omega)$  定义为

$$A_Z(\nu, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z^*\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) Z\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (7.1.16)$$

Wigner-Ville 分布与模糊函数的二维 Fourier 变换等价, 只是相差一个常数因子  $\frac{1}{2\pi}$ , 即

$$W_z(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, \nu) e^{-j(\nu t + \omega\tau)} d\nu d\tau \quad (7.1.17)$$

表 7.1.2 模糊函数的重要数学性质

P1 (共轭对称性)	$A_z(\tau, \nu) = A_z^*(-\tau, -\nu)$
P2 (时移模糊性)	$\tilde{z}(t) = z(t - t_0) \Rightarrow A_{\tilde{z}}(\tau, \nu) = A_z(\tau, \nu)e^{j2\pi t_0 \nu}$
P3 (频移模糊性)	$\tilde{z}(t) = z(t)e^{j\omega_0 t} \Rightarrow A_{\tilde{z}}(\tau, \nu) = A_z(\tau, \nu)e^{j\omega_0 \tau}$
P4 (时延边缘特性)	$A_z(0, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z\left(\omega - \frac{1}{2}\nu\right) Z^*\left(\omega + \frac{1}{2}\nu\right) d\omega$
P5 (频偏边缘特性)	$A_z(\tau, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt$
P6 (总能量保持性)	$A_z(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}  z(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  Z(\omega) ^2 d\omega = E$
P7 (瞬时频率)	$\omega_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial A_z(\tau, \nu)}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} e^{j\nu t} d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} A_z(0, \nu) e^{j\nu t} d\nu}$
P8 (群延迟)	$\tau_g(\nu) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial A_z(\tau, \nu)}{\partial \nu} \right]_{\nu=0} e^{j\nu \tau} d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, 0) e^{j\nu \tau} d\tau}$
P9 (有限时延支撑)	$z(t) = 0, t \notin [t_1, t_2] \Rightarrow A_z(\tau, \nu) = 0, \tau > t_2 - t_1$
P10 (有限频偏支撑)	$Z(\omega) = 0, \omega \notin [\omega_1, \omega_2] \Rightarrow A_z(\tau, \nu) = 0, \nu > \omega_2 - \omega_1$
P11 (Moyal 公式)	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, \nu) A_z^*(\tau, \nu) d\tau d\nu = \left  \int_{-\infty}^{\infty} z(t) x^*(t) dt \right ^2 =  \langle z, x \rangle ^2$
P12 (卷积性)	$z(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow A_z(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\tau, \nu') A_h(\tau - \tau', \nu) d\tau'$
P13 (乘积性)	$z(t) = x(t)h(t) \Rightarrow A_z(\tau, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\tau, \theta) A_h(\tau, \nu - \theta) d\theta$
P14 (Fourier 变换)	$A_Z(\nu, \tau) = 2\pi A_z(\tau, -\nu)$

以两个调制的高斯信号  $x(t)$  和  $y(t)$  的叠加  $z(t) = x(t) + y(t)$  为例, 其中

$$x(t) = e^{j\omega_1(t-t_1)} e^{-\frac{1}{2}\alpha(t-t_1)^2}$$

$$y(t) = e^{j\omega_2(t-t_2)} e^{-\frac{1}{2}\alpha(t-t_2)^2}$$

信号  $z(t)$  的 Wigner-ville 分布和模糊函数如图 7.1.1 所示。

推而广之, 对于多分量信号, 各个分量信号的模糊函数都以原点  $(0, 0)$  为中心, 混合在一起。从这个意义上讲, 这种时频函数对各分量信号是模糊的。然而, 模糊函数所有的交叉项一般都离原点比较远。由于模糊函数的二维 Fourier 变换即为 Wigner-Ville 分布, 所以如同平稳信号的时域和频域表示的作用一样, 非平稳信号的能量域表示 (时频分布) 和相关域表示 (模糊函数) 在非平稳信号的分析与处理中具有同等重要的意义。

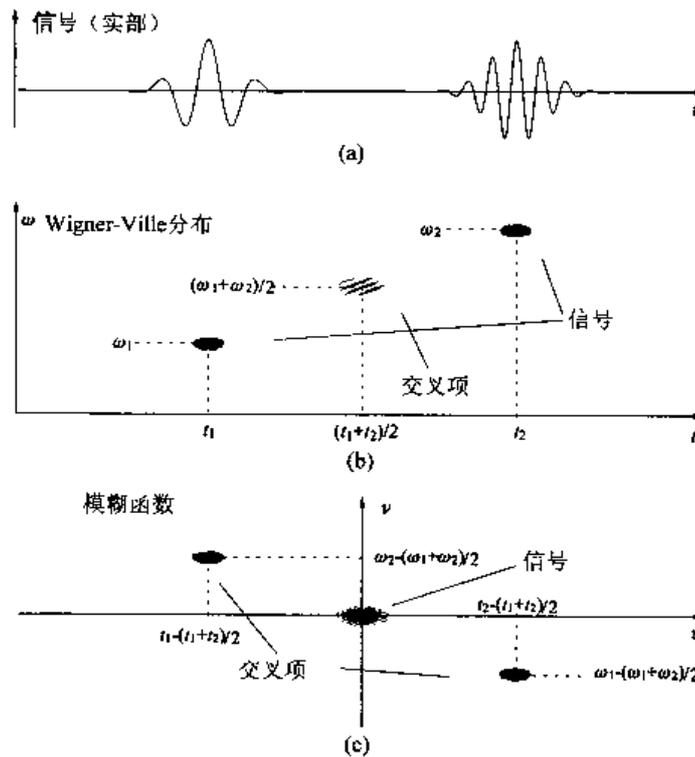


图 7.1.1 两个调制高斯信号的 Wigner-Ville 分布和模糊函数 [27, p.278]

### 7.1.4 Cohen 类时频分布

Cohen 类时频分布有两种等价的定义:

$$C_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, \nu) \phi(\tau, \nu) e^{-j(\nu t + \omega \tau)} d\tau d\nu \quad (7.1.18)$$

或

$$C_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \psi(t - u, \tau) e^{-j\omega \tau} du d\tau \quad (7.1.19)$$

若窗函数  $\phi(\tau, \nu) \equiv 1$ , 则 Cohen 类时频分布退化为 Wigner-Ville 分布。

点谱相关函数定义为

$$K_z(\omega, \nu) = Z^*\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) Z\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) \quad (7.1.20)$$

Wigner-Ville 分布、模糊函数、瞬时相关函数和点谱相关函数是 Cohen 类的四种基本分布。它们之间的关系和四种核函数的关系分别如图 7.1.2 (a) 和 (b) 所示。

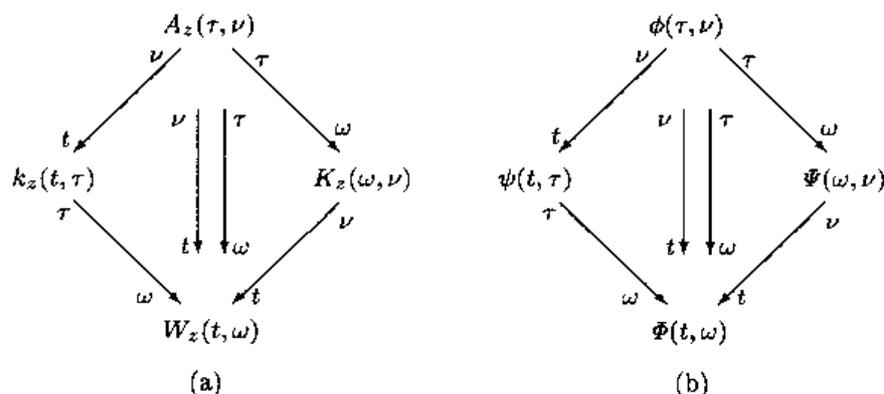


图 7.1.2 Cohen 类四种分布的关系 (a) 和四种核函数的关系 (b)

由图 7.1.2 (a), 可以写出 Wigner-Ville 分布、模糊函数、瞬时相关函数  $z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$  和点谱相关函数  $Z^*\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) Z\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)$  之间的关系式如下:

$$W_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.1.21)$$

$$W_Z(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z^*\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) Z\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{-j\nu t} d\nu \quad (7.1.22)$$

$$A_z(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\nu t} dt \quad (7.1.23)$$

$$A_Z(\nu, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z^*\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) Z\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (7.1.24)$$

$$W_z(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, \nu) e^{-j(\nu t + \omega\tau)} d\nu d\tau \quad (7.1.25)$$

另由图 7.1.2 (b), 又可以写出四种核函数之间的下列关系:

$$\psi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, \nu) e^{-j\nu t} d\nu \quad (7.1.26)$$

$$\Psi(\omega, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, \nu) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.1.27)$$

$$\Phi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.1.28)$$

$$\Phi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega, \nu) e^{-j\nu t} d\nu \quad (7.1.29)$$

$$\Phi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, \nu) e^{-j(\nu t + \omega\tau)} d\nu d\tau \quad (7.1.30)$$

$$\Psi(\omega, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \tau) e^{j(\nu t - \omega\tau)} dt d\tau \quad (7.1.31)$$

根据图 7.1.2 所示关系, 还可写出两两分布之间以及两两核函数之间的其他公式。

表 7.1.3 汇总了为使 Cohen 类分布具有某些基本性质, 核函数应该满足的约束条件。表中的核函数要求 1—10 是 Classen 与 Mecklenbrauker<sup>[6]</sup> 提出的。

表 7.1.3 Cohen 类时频分布基本性能对核函数的要求

No	基本性能	对核函数 $\phi(\tau, \nu)$ 的要求
1	时移不变性	与时间变量 $t$ 无关
2	频移不变性	与频率变量 $\omega$ 无关
3	实值性	$\phi(\tau, \nu) = \phi^*(-\tau, -\nu)$
4	时间边缘特性	$\phi(0, \nu) = 1$
5	频率边缘特性	$\phi(\tau, 0) = 1$
6	瞬时频率特性	$\phi(0, \nu) = 1$ 和 $\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(\tau, \nu) \right _{\tau=0} = 0$
7	群延迟特性	$\phi(\tau, 0) = 1$ 和 $\left. \frac{\partial}{\partial \nu} \phi(\tau, \nu) \right _{\nu=0} = 0$
8	正值性	$\phi(\tau, \nu)$ 是任一窗函数 $\gamma(t)$ 的模糊函数
9	有限时间支撑	$\psi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, \nu) e^{-j\nu t} d\nu = 0, \quad  t  > \frac{ \tau }{2}$
10	有限频率支撑	$\Psi(\omega, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, \nu) e^{-j\omega \tau} d\tau = 0, \quad  \omega  > \frac{ \nu }{2}$
11	Moyal 公式	$ \phi(\tau, \nu)  = 1$
12	卷积性	$\phi(\tau_1 + \tau_2, \nu) = \phi(\tau_1, \nu) \phi(\tau_2, \nu)$
13	乘积性	$\phi(\tau, \nu_1 + \nu_2) = \phi(\tau, \nu_1) \phi(\tau, \nu_2)$
14	Fourier 变换性	$\phi(\tau, \nu) = \phi(\nu, -\tau), \quad \forall \tau \text{ 和 } \nu$

### 7.1.5 时频分布的性能评价

通常希望一种时频信号分析方法具有以下功能:

- (1) 能够确定信号中存在的信号分量个数;
- (2) 能够识别信号分量与交叉项;
- (3) 能够分辨出在时频平面上相距很近的信号分量;
- (4) 能够估计信号各个分量的瞬时频率。

#### 1. 时频聚集性

时频聚集性是指某种时频分布描述信号能量分布的能力。一般希望, 凡是信号能量聚集的时频区域, 时频分布的能量也应该聚集在这些时频区域内; 而不存在信号能量的时频区域内, 也不应该出现时频分布。

常使用线性调频 (LFM) 信号作为评价某种时频分布的时频聚集性的实验信号。

单分量 LFM 信号  $z(t) = e^{j(\omega_0 t + \frac{1}{2} m t^2)}$  的 Wigner-Ville 分布为

$$W_{\text{LFM}}(t, \omega) = \delta[\omega - (\omega_0 + m t)]$$

即单分量 LFM 信号的 Wigner-Ville 分布为沿直线  $\omega = \omega_0 + m t$  分布的冲激线谱, 也就是时频分布的幅值集中出现在表示信号的瞬时频率变化律的直线上。这一事实表明, 对于单分量 LFM 信号, 无论怎样选择窗函数  $\phi(\tau, \nu)$  得到 Cohen 分布, 都不可能给出比窗函数取  $\phi(\tau, \nu) = 1$  的 Wigner-Ville 分布更好的时频聚集性。但是, 对于多分量信号, 取窗函数  $\phi(\tau, \nu) = 1$  不再是最优的选择, 即 Wigner-Ville 分布的时频聚集性不再是最好的。

## 2. 交叉项抑制

与信号项的情况相反, 交叉项却是时频分布里的干扰产物, 它们在时域与(或)频域表现出与原信号的物理性质相矛盾的结果。因此, 需要对时频分布的交叉项加以抑制。

交叉项抑制的两类典型滤波方法:

模糊域滤波法: 在模糊域, 交叉项倾向于远离原点, 而信号项则聚集在原点附近。利用这一区别, 在模糊域对模糊函数进行滤波, 滤去交叉项; 然后, 再由模糊函数的二维 Fourier 变换求 Wigner-Ville 分布。

核函数滤波法: 适当选择核函数, 对交叉项滤波, 加以抑制。

研究时频分布交叉项的典型实验信号为多分量音调信号

$$z(t) = \sum_{i=1}^p e^{j\omega_i t}$$

交叉项抑制对 Cohen 类分布的核函数  $\Psi(\omega, \nu)$  的要求条件:

(1) 为使交叉项不会出现在信号等于零的时间区域内 (弱有限时间支撑特性), 核函数必须满足时域约束条件

$$\psi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, \nu) e^{j\nu t} d\nu = 0, \quad |t| > \frac{|\tau|}{2} \quad (7.1.32)$$

(2) 为使交叉项不会出现在信号频谱等于零的时间区域内 (弱有限频率支撑特性), 核函数必须满足频域约束条件

$$\Psi(\omega, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, \nu) e^{-j\omega \tau} d\tau = 0, \quad |\omega| > \frac{|\nu|}{2} \quad (7.1.33)$$

(3) 为使交叉项不会出现在信号  $z(t)$  等于零的时间段内 (强有限时间支撑特性),

核函数应该满足时域约束条件

$$\psi(t, \tau) = 0, \quad \forall |t| \neq \frac{|\tau|}{2} \quad (7.1.34)$$

(4) 为使交叉项不会出现在信号频谱等于零的频率段内 (强有限频率支撑特性), 核函数必须满足频域约束条件

$$\Psi(\omega, \nu) = 0, \quad \forall |\omega| \neq \frac{|\nu|}{2} \quad (7.1.35)$$

交叉项的抑制与信号项的维持是一对矛盾, 因为交叉项的减小必然会对信号项产生拉平的负面作用。若核函数满足交叉项的强有限支撑条件 (7.1.34) 和 (7.1.35), 虽然在没有信号项的时频区域, 交叉项被完全抑制, 但凡是存在信号项的地方, 却总是伴随有交叉项存在。这种信号项与交叉项的共存对信号的恢复显然是不利的。

### 7.1.6 时频分布的改进

下面是几种改进的 Cohen 类时频分布。

(1) Choi-Williams 分布<sup>[5]</sup>

$$\text{CWD}_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha\tau^2}} \exp\left[-\frac{(t-u)^2}{4\alpha\tau^2}\right] z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} du \quad (7.1.36)$$

这是一种核函数取指数核函数

$$\phi(\tau, \nu) = \exp[-\alpha(\tau\nu)^2] \quad (7.1.37)$$

的 Cohen 类分布。

Choi-Williams 分布抑制交叉项的功能如下:

- 由式 (7.1.37) 易验证  $\phi(0, 0) = 1$ ,  $\phi(0, \nu) = 1$  和  $\phi(\tau, 0) = 1$ 。这表明, 指数核函数对原点 (0, 0) 以及横轴 ( $\tau$  轴) 和纵轴 ( $\nu$  轴) 上的模糊函数没有任何影响。因此, 若模糊函数的交叉项出现在横轴和纵轴上, 则它们将不能被抑制, 从而时频分布中相对应的交叉项也不能被抑制。

- 由于  $\phi(\tau, \nu) < 1$  若  $\tau \neq 0$  和  $\nu \neq 0$ , 故模糊函数在坐标轴以外的交叉项都能够得到一定程度的抑制, 从而可减小与这些模糊交叉项相对应的时频分布交叉项。

(2) 减小交叉项分布<sup>[19]</sup>

Choi-Williams 分布虽然可以抑制模糊域中横轴和纵轴以外的交叉项, 但仍然保留了横轴和纵轴上的交叉项。由于信号项一般位于模糊平面即  $(\tau, \nu)$  平面的原点附

近, 而交叉项又常常离原点比较远, 所以很自然地希望核函数  $\phi(\tau, \nu)$  是二维低通滤波函数, 即

$$|\phi(\tau, \nu)| \ll 1, \quad \text{对 } |\tau\nu| \gg 0 \quad (7.1.38)$$

低通核函数的设计.

第一步, 选择一个具有以下性质的实值窗函数  $h(t)$ :

$$\text{R1: } \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 1;$$

$$\text{R2: } h(t) = h(-t);$$

$$\text{R3: } h(t) = 0, \quad \text{其中 } |t| > 0.5;$$

R4:  $h(t)$  的 Fourier 变换  $H(\omega)$  是可微分的, 且具有低通特性, 即对大的频率  $\omega$ , 滤波器的幅值响应远小于 1, 或  $|H(\omega)| \ll 1$ .

第二步, 核函数取作

$$\phi(\tau, \nu) = H(\tau\nu)$$

减小交叉项 (RID) 分布在各个域的核函数分别为

$$\psi_{\text{RID}}(t, \tau) = \frac{1}{|\tau|} h\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (7.1.39)$$

$$\Psi_{\text{RID}}(\omega, \nu) = \frac{1}{|\nu|} h\left(\frac{\omega}{\nu}\right) \quad (7.1.40)$$

$$\phi_{\text{RID}}(\tau, \nu) = H(\tau\nu) \quad (7.1.41)$$

$$\Phi_{\text{RID}}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j2\pi\tau\omega} d\tau \quad (7.1.42)$$

图 7.1.3 (a) 和 (b) 分别示出了 RID 分布的核函数在  $(t, \tau)$  和  $(\omega, \nu)$  域上的非零值支撑区, 它们为角锥形, 并具有相同的形式; 而图 7.1.3 (c) 则画出了 RID 分布的核函数在时频域的形状. 使时频分布支撑区为角锥形的核函数统称为角锥形核函数.

(3) 锥形分布<sup>[54]</sup>

核函数取

$$\psi(t, \tau) = \begin{cases} g(\tau), & |\tau| \geq 2|t| \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7.1.43)$$

其形状为锥形, 故名锥形核函数. 锥形核函数在模糊域  $(\tau, \nu)$  的表示为

$$\begin{aligned} \phi(\tau, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \tau) e^{-j\nu t} dt = g(\tau) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\nu t} dt \\ &= 2g(\tau) \frac{\sin(\tau\nu/2)}{\nu} \end{aligned} \quad (7.1.44)$$

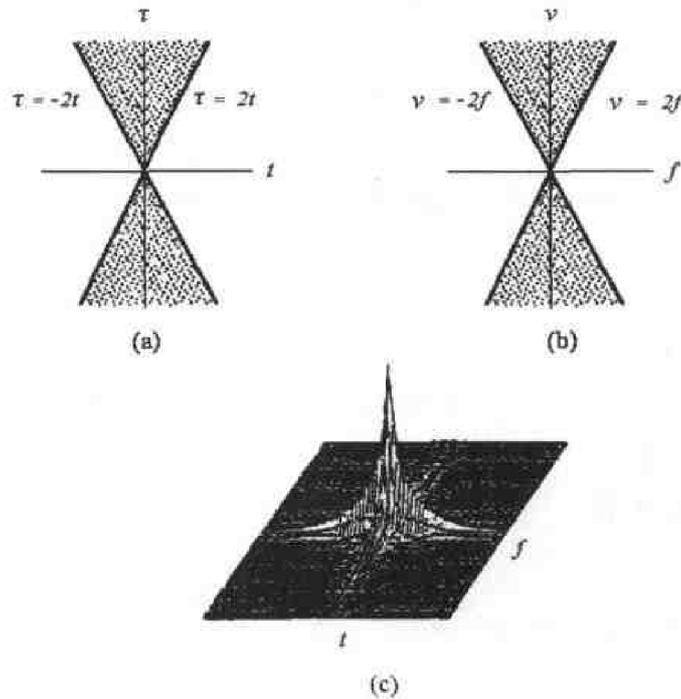


图 7.1.3 RID 分布的支撑区 (a), (b) 及其时频域形状 (c) [19]

特别地, 当取

$$g(\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\alpha\tau^2} \quad (7.1.45)$$

时, 锥形核函数为

$$\phi(\tau, \nu) = \frac{\sin(\tau\nu/2)}{\tau\nu/2} e^{-\alpha\tau^2}, \quad \alpha > 0 \quad (7.1.46)$$

特点: 指数核函数 (Choi-Williams 分布) 不能抑制坐标轴上的交叉项, 而锥形核函数可以抑制  $\tau$  轴上的交叉项。

(4) Wigner-Ville 分布的几种变型

• 伪 Wigner-Ville 分布 (PWD)

$$\text{PWD}_z(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.1.47)$$

$$= W_z(t, \omega) \overset{\omega}{*} H(\omega) \quad (7.1.48)$$

式中  $\overset{\omega}{*}$  表示关于频率变量  $f$  的卷积。注意, 窗函数  $H(\omega)$  本质上应该是一低通函数。

• 平滑 Wigner-Ville 分布 (SWD)

$$\text{SWD}_z(t, \omega) = W_z(t, \omega) \overset{t, \omega}{**} G(t, \omega) \quad (7.1.49)$$

式中  $G(t, \omega)$  为窗函数。这种分布因直接对 Wigner-Ville 分布进行平滑滤波而得名。

- 平滑伪 Wigner-Ville 分布 (SPWD)

$$\text{SPWD}_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)h(\tau)z\left(t-u+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t-u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}dud\tau \quad (7.1.50)$$

式中  $g(t)$  和  $h(\tau)$  是两个实的偶窗函数, 且  $h(0) = G(0) = 1$ .

- 修正平滑伪 Wigner-Ville 分布 (MSPWD)

$$\text{MSPWD}_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{SPWD}_z(t', \omega')\delta[t-\hat{t}(t', \omega')]\delta[\omega-\hat{\omega}(t', \omega')]dt'd\omega' \quad (7.1.51)$$

式中  $\hat{t}(t', \omega')$  和  $\hat{\omega}(t', \omega')$  分别代表重排后的时间和频率点.

修正平滑伪 Wigner-Ville 分布的算法<sup>[1]</sup>

符号说明:  $z(k)$  为解析信号,  $g(k)$  和  $h(k)$  分别为  $2M-1$  点和  $2N-1$  点的平滑窗函数,  $n_0$  系起始时间,  $\Delta$  为时间增量, 而  $N_T$  和  $N_{\text{TFR}}$  分别为分析的时间和频率点数.

For  $n = n_0 + i\Delta, i = 0, \dots, N_T - 1$  Do

$$\text{SPWD}_{g,h}(n, m) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} h(k)e^{-j\frac{2\pi mk}{N_{\text{TFR}}}} \sum_{l=-M+1}^{M-1} g(l)z(n-l+k)z^*(n-l-k)$$

$$\text{SPWD}_{\tau g,h}(n, m) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} h(k)e^{-j\frac{2\pi mk}{N_{\text{TFR}}}} \sum_{l=-M+1}^{M-1} l \times g(l)z(n-l+k)z^*(n-l-k)$$

$$\text{SPWD}_{g,Dh}(n, m) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} h'(k)e^{-j\frac{2\pi mk}{N_{\text{TFR}}}} \sum_{l=-M+1}^{M-1} g(l)z(n-l+k)z^*(n-l-k)$$

$$\text{其中 } h'(k) = T_e \frac{dh(kT_e)}{dt}$$

For  $m = 0, \dots, N_{\text{TFR}} - 1$  Do

If ( $|\text{SPWD}_{g,h}(n, m)| > \varepsilon$ ) Then

$$\hat{n}(n, m) = n - \left\lfloor \frac{1}{\Delta} \frac{\text{SPWD}_{\tau g,h}(n, m)}{\text{SPWD}_{g,h}(n, m)} \right\rfloor \Delta$$

$$\hat{m}(n, m) = m - \left\lfloor \frac{N_{\text{TFR}}}{2\pi} \text{Im} \left[ \frac{\text{SPWD}_{g,Dh}(n, m)}{\text{SPWD}_{g,h}(n, m)} \right] \right\rfloor$$

$$\text{MSPWD}(\hat{n}, \hat{m}) = \text{MSPWD}(\hat{n}, \hat{m}) + \text{SPWD}_{g,h}(n, m)$$

Endif

Endfor

Endfor

(5) B 分布 [2]

$$B(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \frac{|\tau|^\sigma}{\cosh^{2\sigma}(u-t)} e^{-j\omega\tau} du d\tau \quad (7.1.52)$$

它是一种核函数取

$$\psi(t, \tau) = \left(\frac{|\tau|}{\cosh^2(t)}\right)^\sigma \quad (7.1.53)$$

的 Cohen 类分布。

表 7.1.4 典型的 Cohen 类时频分布及对应的核函数

Cohen 类时频分布	$\psi(t, \tau)$	$\phi(\tau, \nu)$
B 分布	$\left(\frac{ \tau }{\cosh^2(t)}\right)^\sigma$	$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \tau) e^{-j\nu t} dt$
Born-Jordan 分布 (BJD)	$\begin{cases} \frac{q}{ \tau }, &  \tau  \geq 2 t  \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{\sin(\tau\nu/2)}{\tau\nu/2}$
Butterworth 分布 (BUD)	$\mathcal{F}^{-1} \phi(\tau, \nu)$ $\nu \rightarrow t$	$\frac{1}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2M} + \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{2N}}$
Choi-Williams 分布 (CWD)	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha\tau^2}} \exp\left(-\frac{1}{4\pi\alpha\tau^2} t^2\right)$	$\exp[-\alpha(\tau\nu)^2]$
锥形分布 (CSD)	$\begin{cases} g(\tau), &  \tau  \geq 2 t  \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$2g(\tau) \frac{\sin(\tau\nu/2)}{\nu}$
广义指数分布 (GED)	$\mathcal{F}^{-1} \Psi(\tau, \nu)$ $\nu \rightarrow t$	$\exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2M} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{2N}\right]$
广义 Wigner 分布 (GWD)	$\delta(t + \alpha\tau)$	$\exp(j\alpha\tau\nu)$
Levin 分布 (LD)	$\delta\left(t + \frac{ \tau }{2}\right)$	$\exp(j\pi \tau \nu)$
Page 分布 (PD)	$\delta\left(t - \frac{ \tau }{2}\right)$	$\exp(-j\pi \tau \nu)$
伪 Wigner 分布 (PWD)	$\delta(t)\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)$	$\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)$
实值广义 Wigner 分布 (RGWD)	$\frac{1}{2}[\delta(t + \alpha\tau) + \delta(t - \alpha\tau)]$	$\cos(2\pi\alpha\tau\nu)$
减小交叉项分布 (RID)	$\frac{1}{\tau} s\left(\frac{t}{\nu}\right)^{1)}$	$S(\tau\nu)^{1)}$
Rihaczek 分布 (RD)	$\delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$	$\exp(j\pi\tau\nu)$
平滑伪 Wigner 分布 (SPWD)	$g(t)\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)$	$\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) G(\nu)$
谱图 (SPEC)	$\gamma\left(-t - \frac{\tau}{2}\right)\gamma^*\left(-t + \frac{\tau}{2}\right)$	$A_\gamma(-\tau, -\nu)$
Wigner-Ville 分布 (WVD)	$\delta(t)$	1

注: 函数  $s(\alpha) \leftrightarrow S(\beta)$  满足条件:  $\alpha = 0$  时  $s(\alpha) = 0$ ,  $S(\beta) \in R$ ,  $S(0) = 1$ ,  $\left.\frac{d}{d\beta} S(\beta)\right|_{\beta=0} = 0$ .

## 7.2 习 题

**题 7.1** 求时域和频移  $\delta$  函数  $z(t) = \delta(t-t_0)$  和  $Z(\omega) = \delta(\omega-\omega_0)$  的 Wigner-Ville 分布。

**题 7.2**  $z(t) = e^{j\frac{1}{2}mt^2}$  是一线性调频 (LFM) 信号, 其中  $m$  为调频斜率。求其 Wigner-Ville 分布。

**题 7.3** 求高斯信号  $z(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\pi t^2/\sigma^2}$  的 Wigner-Ville 分布。

**题 7.4** 信号

$$z(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)$$

是一个归一化的高斯信号, 具有单位能量。求其 Wigner-Ville 分布。

**题 7.5** 一非平稳信号由两个高斯函数叠加而成:

$$z(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \left\{ \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(t-t_1)^2 + j\omega_1 t\right] + \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(t-t_2)^2 + j\omega_2 t\right] \right\}$$

其中  $t_1 > t_2$  和  $\omega_1 > \omega_2$ 。证明: 信号  $z(t)$  的 Wigner-Ville 分布的信号项 (自项) 和交叉项分别为

$$W_{\text{auto}}(t, \omega) = 2 \sum_{i=1}^2 \exp\left[-\alpha(t-t_i)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega-\omega_i)^2\right]$$

和

$$W_{\text{cross}}(t, \omega) = 4 \exp\left[-\alpha(t-t_m)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega-\omega_m)^2\right] \cos[(\omega-\omega_m)t_d + \omega_d t]$$

式中

$$t_m = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \quad \text{和} \quad \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

分别为两个谐波信号时延的平均值和频率的平均值, 而

$$t_d = t_1 - t_2 \quad \text{和} \quad \omega_d = \omega_1 - \omega_2$$

分别是两个谐波信号时延差与频率差。

**题 7.6** 信号  $x(t)$  和  $g(t)$  的互 Wigner-Ville 分布的频域定义为

$$W_{X,G}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) G^*\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{j\nu t} d\nu$$

证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_X(t, \omega) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) dt$$

**题 7.7** 证明瞬时频率的定义公式

$$\omega_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega W_x(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) d\omega}$$

提示：利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-j\omega\tau} d\omega = \frac{2\pi}{j} \frac{\partial \delta(\tau)}{\partial \tau}$$

**题 7.8** 证明 Wigner-Ville 分布的 Moyal 公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) W_y^*(t, \omega) dt d\omega = |\langle x, y \rangle|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2$$

**题 7.9** 令  $x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$  是实信号  $x(t)$  的解析信号，其中  $\hat{x}(t)$  是  $x(t)$  的 Hilbert 变换。试求解析信号  $x_a(t)$  的 Wigner-Ville 变换与实信号  $x(t)$  的 Wigner-Ville 变换之间的关系式<sup>[33]</sup>。

**题 7.10** 令  $z(t) = \delta(t - t_0)$  和  $Z(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$  分别是时域和频移的  $\delta$  函数，求它们的模糊函数。

**题 7.11** 求 LFM 信号  $z(t) = e^{jmt^2/2}$  的模糊函数。

**题 7.12** 求高斯信号  $z(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\pi t^2/\sigma^2}$  的模糊函数。

**题 7.13** 证明题 7.5 的非平稳信号  $z(t)$  的模糊函数的自项和交叉项分别由

$$A_{\text{auto}}(\tau, \theta) = \exp \left[ - \left( \frac{\alpha}{4} \tau^2 + \frac{1}{4\alpha} \theta^2 \right) \right] \sum_{i=1}^2 \exp[j(\omega_i \tau - t_i \theta)]$$

和

$$A_{\text{cross}}(\tau, \theta) = \left\{ \exp \left[ - \frac{1}{4\alpha} (\theta + \omega_d)^2 - \frac{\alpha}{4} (\tau - t_d)^2 \right] + \exp \left[ - \frac{1}{4\alpha} (\theta - \omega_d)^2 - \frac{\alpha}{4} (\tau + t_d)^2 \right] \right\} \exp[j(\omega_m \tau + \theta t_m + \omega_d t_m)]$$

给出。

**题 7.14** 证明当核函数  $\phi(\tau, \nu)$  取作任意窗函数  $\gamma(t)$  的模糊函数时，Cohen 类时频分布等价于谱图，即它具有非负性。

**题 7.15** 考虑一线性调频信号  $e^{j(\omega_0 t + \mu t^2)}$  被高斯信号的包络  $e^{-0.5\gamma t^2}$  调制的情况, 即

$$y(t) = e^{-0.5\gamma t^2} e^{j(\omega_0 t + \mu t^2)}$$

求信号  $y(t)$  的 Wigner-Ville 分布, 并证明 Wigner-Ville 分布在这种情况下是非负的.

**题 7.16** 令

$$\text{SWD}_z(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\theta, \nu) W_z(t - \theta, \omega - \nu) d\nu d\theta$$

是信号  $z(t)$  的平滑 Wigner-Ville 分布. 若选择

$$\Phi(t, \omega) = W_x(t, \omega)$$

是某个信号  $x(t)$  的 Wigner-Ville 分布, 试证明  $\text{SWD}_z(t, \omega)$  在这种情况下是非负的.

**题 7.17** 考查加权误差函数

$$J(t, \omega; m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_h(nT) F(e(t, \omega, n))$$

式中  $w_h(nT)$  为窗函数, 其长度为  $h$ ;  $T$  代表采样间隔;  $e(t, \omega, n)$  为误差函数. 若取  $F(e(t, \omega, n)) = |e(t, \omega, n)| = |x(t + nT) - me^{j\omega nT}|$ , 试证明优化问题

$$\text{STFT}(t, \omega) = \arg \min_m J(t, \omega; m)$$

的解为

$$\text{STFT}_R(t, \omega) = \sum_{n=1}^N d(t, \omega, n) x(t + nT) e^{-j\omega nT}$$

$$d(t, \omega, n) = \gamma(t, \omega, n) \left/ \sum_{n=1}^N \gamma(t, \omega, n) \right.$$

$$\gamma(t, \omega, n) = w_h(nT) |e(t, \omega, n)|^{-1}$$

这种短时 Fourier 变换称为鲁棒短时 Fourier 变换<sup>[10]</sup>.

**题 7.18** 若取误差函数

$$F(e(t, \omega, n)) = |e(t, \omega, n)| = |2x(t + nT)x^*(t - nT) - me^{j\omega nT}|$$

证明优化问题

$$W(t, \omega) = \arg \min_m J(t, \omega; m)$$

的解为

$$W_R(t, \omega) = \frac{2}{\sum_{n=1}^N w_h(nT)/|e(t, \omega, n)|} \sum_{n=1}^N \frac{w_h(nT)}{|e(t, \omega, n)|} x(t+nT)x^*(t-nT)e^{-j2\omega nT}$$

这一时频分布称为鲁棒 Wigner-Ville 分布, 是文献 [10] 提出的。

## 7.3 习题解答

题 7.1 由 Wigner-Ville 分布定义, 得

$$\begin{aligned} W_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t + \frac{\tau}{2} - t_0\right) \delta\left(t - \frac{\tau}{2} - t_0\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

由  $\delta$  函数的定义知,

$$\delta\left(t + \frac{\tau}{2} - t_0\right) \delta\left(t - \frac{\tau}{2} - t_0\right) = \begin{cases} \delta(t - t_0)\delta(t - t_0), & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

故有

$$W_z(t, \omega) = \delta(t - t_0)\delta(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} W_z(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Z^*\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) Z\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{-j\nu t} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega + \frac{\nu}{2} - \omega_0\right) \delta\left(\omega - \frac{\nu}{2} - \omega_0\right) e^{-j\nu t} d\nu \\ &= \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

因为仅当  $\nu = 0$  和  $\omega = \omega_0$  时,  $\delta$  函数  $\delta\left(\omega + \frac{\nu}{2} - \omega_0\right)$  和  $\delta\left(\omega - \frac{\nu}{2} - \omega_0\right)$  才同时不等于零. 证毕.

题 7.2 由 Wigner-Ville 分布的定义, 计算得

$$\begin{aligned} W_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\frac{1}{2}m\left(t + \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \exp\left[-j\frac{1}{2}m\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \exp(-j\omega\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - mt)\tau} d\tau \\ &= \delta(\omega - mt) \end{aligned}$$

证毕.

**题 7.3** 计算 Wigner-Ville 分布, 得

$$\begin{aligned} W_z(t, \omega) &= \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\pi \frac{1}{\sigma^2} \left( t + \frac{\tau}{2} \right)^2 \right] \exp \left[ -\pi \frac{1}{\sigma^2} \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2 \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{\pi}{2\sigma^2} \tau^2 - j\omega\tau - \frac{2\pi t^2}{\sigma^2} \right) d\tau \end{aligned}$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp \left( -\frac{AC - B^2}{A} \right)$$

中, 令  $A = \pi/(2\sigma^2)$ ,  $B = \frac{1}{2}j\omega$  和  $C = 2\pi t^2/\sigma^2$ , 则

$$W_z(t, \omega) = \exp \left( -2\pi \frac{t^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2\pi} \omega^2 \sigma^2 \right)$$

证毕.

**题 7.4** 由定义, 信号  $z(t)$  的 Wigner-Ville 分布为

$$\begin{aligned} W_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z \left( t + \frac{\tau}{2} \right) z^* \left( t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha}{2} \left( t + \frac{\tau}{2} \right)^2 - \frac{\alpha}{2} \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2 \right] \exp(-j\omega\tau) \tau \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{\alpha}{4} \tau^2 - j\omega\tau - \alpha t^2 \right) d\tau \end{aligned}$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp \left( -\frac{AC - B^2}{A} \right)$$

中, 令  $A = \frac{\alpha}{4}$ ,  $B = \frac{j\omega}{2}$  和  $C = \alpha t^2$ , 则有

$$W_z(t, \omega) = 2 \exp \left[ -\left( \alpha t^2 + \frac{1}{\alpha} \omega^2 \right) \right]$$

证毕.

**题 7.5** 由二次叠加原理知, Wigner-Ville 分布的自项和交叉项分别为

$$W_{\text{auto}}(t, \omega) = W_{z_1}(t, \omega) + W_{z_2}(t, \omega)$$

$$W_{\text{cross}}(t, \omega) = W_{z_1, z_2}(t, \omega) + W_{z_2, z_1}(t, \omega)$$

式中

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(t-t_1)^2 + j\omega_1 t\right] \\ z_2 &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(t-t_2)^2 + j\omega_2 t\right] \end{aligned}$$

由 Wigner-Ville 分布的定义知

$$\begin{aligned} W_{z_1}(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z_1^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\tau\omega} d\tau \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\alpha}{4}\tau^2 - j(\omega - \omega_1)\tau - \alpha(t-t_1)^2\right] d\tau \end{aligned}$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$$

中, 令  $A = \frac{\alpha}{4}$ ,  $B = j(\omega - \omega_1)$  和  $C = \alpha(t-t_1)^2$ , 则得

$$W_{z_1}(t, \omega) = 2 \exp\left[-\alpha(t-t_1)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega - \omega_1)^2\right]$$

类似地, 我们有

$$W_{z_2}(t, \omega) = 2 \exp\left[-\alpha(t-t_2)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega - \omega_2)^2\right]$$

故

$$W_{\text{auto}}(t, \omega) = 2 \sum_{i=1}^2 \exp\left[-\alpha(t-t_i)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega - \omega_i)^2\right]$$

又由交叉项定义知

$$\begin{aligned} W_{z_1, z_2}(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\tau\omega} d\tau \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha}{4}\tau^2 + \left[\frac{\alpha}{2}(t_1 - t_2) - j\omega + j\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right]\tau - \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha}{2}\left[(t-t_1)^2 + (t-t_2)^2 + j(\omega_1 - \omega_2)t\right]\right\} d\tau \end{aligned}$$

于是, 积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$$

中的参数为

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha}{4} \\ B &= \frac{\alpha}{4}(t_1 - t_2) - \frac{1}{2}j \left[ \omega - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \right] \\ C &= \frac{\alpha}{2} \left[ (t - t_1)^2 + (t - t_2)^2 + j(\omega_1 - \omega_2)t \right] \end{aligned}$$

由此得

$$W_{z_1, z_2}(t, \omega) = 2 \exp \left[ -\alpha(t - t_m)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega - \omega_m)^2 \right] \exp \{ -j [(\omega - \omega_m)t_d + \omega_d t] \}$$

故 Wigner-Ville 分布的交叉项

$$\begin{aligned} W_{\text{cross}}(t, \omega) &= 2 \operatorname{Re}[W_{z_1, z_2}(t, \omega)] \\ &= 4 \exp \left[ -\alpha(t - t_m)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega - \omega_m)^2 \right] \cos [(\omega - \omega_m)t_d + \omega_d t] \end{aligned}$$

式中

$$t_m = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \quad \text{和} \quad \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

分别为两个谐波信号时延的平均值和频率的平均值, 而

$$t_d = t_1 - t_2 \quad \text{和} \quad \omega_d = \omega_1 - \omega_2$$

分别是两个谐波信号时延差与频率差。证毕。

**题 7.6** 由题知

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W_{X, G}(t, \omega) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X \left( \omega + \frac{\nu}{2} \right) G^* \left( \omega - \frac{\nu}{2} \right) e^{j\nu t} d\nu dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X \left( \omega + \frac{\nu}{2} \right) G^* \left( \omega - \frac{\nu}{2} \right) d\nu \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\nu t} dt \end{aligned}$$

将  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\nu t} dt = \delta(\nu)$  代入上式, 立即有

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{X, G}(t, \omega) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu) X \left( \omega + \frac{\nu}{2} \right) G^* \left( \omega - \frac{\nu}{2} \right) d\nu = X(\omega) G^*(\omega)$$

当  $X(\omega) = G(\omega)$  时, 上式即给出

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_X(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2 \quad (\text{题 7.6.1})$$

由于  $W_x(t, \omega)$  在整个时间轴上的积分给出信号  $x(t)$  的能量为

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2 \quad (\text{题 7.6.2})$$

故比较式 (题 7.6.1) 和式 (题 7.6.2) 立即得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_X(t, \omega) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) dt$$

证毕.

**题 7.7** 令  $x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$ , 其中  $A(t) > 0$ , 则

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \omega W_x(t, \omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega \int_{-\infty}^{\infty} A(t+0.5\tau) e^{j\phi(t+0.5\tau)} A(t-0.5\tau) e^{-j\phi(t-0.5\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(t+0.5\tau) A(t-0.5\tau) e^{-j[\phi(t-0.5\tau)-\phi(t+0.5\tau)]} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-j\omega\tau} d\omega \right) d\tau \end{aligned} \quad (\text{题 7.7.1})$$

将积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-j\omega\tau} d\omega = \frac{2\pi}{j} \frac{\partial \delta(\tau)}{\partial \tau}$$

代入式 (题 7.7.1) 后, 得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \omega W_x(t, \omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} A(t+0.5\tau) A(t-0.5\tau) e^{-j[\phi(t-0.5\tau)-\phi(t+0.5\tau)]} \frac{2\pi}{j} \frac{\partial \delta(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &= \frac{2\pi}{j} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ A(t+0.5\tau) A(t-0.5\tau) e^{-j[\phi(t-0.5\tau)-\phi(t+0.5\tau)]} \right] \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{2\pi}{j} \left[ \frac{\dot{A}(t)A(t)}{2} - \frac{A(t)\dot{A}(t)}{2} + A^2(t)j\dot{\phi}(t) \right] \\ &= 2\pi A^2(t)\dot{\phi}(t) \end{aligned} \quad (\text{题 7.7.2})$$

将 Wigner-Ville 分布的时间边缘特性

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2 = A^2(t) \quad (\text{题 7.7.3})$$

代入式 (题 7.7.2), 立即得到

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega W_x(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) d\omega} \quad (\text{题 7.7.4})$$

根据瞬时频率的定义  $\omega_i(t) = \dot{\phi}(t)$ , 式 (题 7.7.4) 直接给出

$$\omega_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega W_x(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) d\omega}$$

证毕.

**题 7.8** 对 Moyal 公式的左边进行计算得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) W_y^*(t, \omega) dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{u}{2}\right) x^*\left(t - \frac{u}{2}\right) e^{-j\omega u} du \right] \times \\ & \quad \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y^*\left(t + \frac{s}{2}\right) y\left(t - \frac{s}{2}\right) e^{-j\omega s} ds \right] dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{u}{2}\right) y^*\left(t + \frac{s}{2}\right) x^*\left(t - \frac{u}{2}\right) y\left(t - \frac{s}{2}\right) \delta(s - u) du dt ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ x\left(t + \frac{u}{2}\right) y^*\left(t + \frac{u}{2}\right) \right] \left[ x\left(t - \frac{u}{2}\right) y^*\left(t - \frac{u}{2}\right) \right]^* du dt \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \end{aligned}$$

证毕.

**题 7.9** 解析信号与原信号的频谱存在以下关系:

$$X_a(f) = \mathcal{F}[x_a(t)] = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ X(0), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

将这一关系代入 Wigner-Ville 分布的频域定义式, 即有

$$\begin{aligned} W_{X_a}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a\left(f + \frac{\nu}{2}\right) X_a^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) e^{j2\pi\nu t} d\nu \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\nu t} X\left(f + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) d\nu \\ &= 4 \int_{-2f}^{2f} e^{j2\pi\nu t} X\left(f + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) d\nu, \quad f > 0 \end{aligned} \quad (\text{题 7.9.1})$$

另一方面, 实信号  $x(t)$  的 Wigner-Ville 分布

$$W_X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

故有

$$X\left(f + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} W_X(t, f) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (\text{题 7.9.2})$$

将式(题 7.9.2)代入式(题 7.9.1)得

$$\begin{aligned} W_{x_a}(t, f) &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} W_X(t, f) \int_{-2f}^{2f} e^{j2\pi\nu(t-\tau)} d\nu d\tau \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_X(t, f) \frac{\sin[4\pi(t-\tau)]}{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_X(t-\tau, f) \frac{\sin(4\pi f\tau)}{\tau} d\tau, \quad f > 0 \end{aligned} \quad (\text{题 7.9.3})$$

由于  $W_{x_a}(t, f) = W_{x_a}(t, f)$  和  $W_X(t, f) = W_x(t, f)$ , 故式(题 7.9.3)可等价写作

$$W_{x_a}(t, f) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t-\tau, f) \frac{\sin(4\pi f\tau)}{\tau} d\tau, & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (\text{题 7.9.4})$$

**答案:** 解析信号  $x_a(t)$  与原信号  $x(t)$  的 Wigner-Ville 分布之间的关系如式(题 7.9.4)所示。这一关系表明, 解析信号  $x_a(t)$  在固定频率  $f(>0)$  的 Wigner-Ville 分布  $W_{x_a}(t, f)$  可以看作是实信号  $x(t)$  在同一频率的 Wigner-Ville 分布  $W_x(t, f)$  的时间函数, 并且这一时间函数通过一理想的低通滤波器(其截止频率为  $2f$ )。这意味着,  $W_{x_a}(t, f)$  是一最高频率至多为  $2f$  的时间函数<sup>[33]</sup>。

**题 7.10** 由模糊函数的定义式, 计算得

$$\begin{aligned} A_z(\tau, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t + \frac{\tau}{2} - t_0\right) \delta\left(t - \frac{\tau}{2} - t_0\right) e^{j\nu t} dt \end{aligned}$$

注意到仅当  $t = t_0$  时, 两个  $\delta$  函数  $\delta\left(t + \frac{\tau}{2} - t_0\right)$  和  $\delta\left(t - \frac{\tau}{2} - t_0\right)$  才同时不等于零, 故上式的积分结果为

$$A_z(\tau, \nu) = e^{-j\nu t_0} \delta(\tau)$$

注意, 这里利用了  $\delta$  函数的性质  $\delta\left(\frac{\tau}{2}\right) = \delta(\tau)$ 。

类似地, 有

$$\begin{aligned} A_Z(\nu, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} Z^*\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) Z\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega + \frac{\nu}{2} - \omega_0\right) \delta\left(\omega - \frac{\nu}{2} - \omega_0\right) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

由于上式右边的两个  $\delta$  函数仅当  $\omega = \omega_0$  时才同时不为零, 故上式的积分结果为

$$A_Z(\nu, \tau) = e^{j\omega_0\tau} \delta(\nu)$$

其中利用了  $\delta$  函数的性质  $\delta\left(\frac{\nu}{2}\right) = \delta(\nu)$ 。

**答案:** 时域  $\delta$  函数  $z(t) = \delta(t - t_0)$  的模糊函数为

$$A_z(\tau, \nu) = e^{-j\nu t_0} \delta(\tau)$$

频移  $\delta$  函数  $Z(f) = \delta(f - f_0)$  的模糊函数为

$$A_Z(\nu, \tau) = e^{j\omega_0 \tau} \delta(\nu)$$

**题 7.11** 计算 LFM 信号的模糊函数, 得

$$\begin{aligned} A_z(\tau, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\frac{1}{2}m\left(t + \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \exp\left[-j\frac{1}{2}m\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \exp(j\nu t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\nu - m\tau)t} dt \\ &= \delta(\nu - m\tau) \end{aligned}$$

**答案:** 线性调频信号的模糊函数为冲激函数, 即有

$$A_z(\tau, \nu) = \delta(\nu - m\tau)$$

**题 7.12** 计算模糊函数, 得

$$\begin{aligned} A_z(\tau, \nu) &= \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi\frac{1}{\sigma^2}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \exp\left[-\pi\frac{1}{\sigma^2}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2\right] e^{j\nu t} dt \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi}{\sigma^2}t^2 + j\nu t - \frac{\pi}{2\sigma^2}\tau^2\right) dt \end{aligned} \quad (\text{题 7.12.1})$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$$

中, 令

$$A = \frac{2\pi}{\sigma^2}, \quad B = \frac{1}{2}j\nu, \quad C = \frac{\pi}{2\sigma^2}\tau^2$$

则式 (题 7.12.1) 给出结果:

$$A_z(\tau, \nu) = \exp\left(-\frac{\pi}{2\sigma^2}\tau^2 - \frac{1}{8\pi}\nu^2\sigma^2\right) \quad (\text{题 7.12.2})$$

**答案:** 高斯信号  $z(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\pi t^2/\sigma^2}$  的模糊函数由式 (题 7.12.2) 给出。

题 7.13 与题 7.5 类似, 信号  $z(t)$  的模糊函数的自项和交叉项可分别表示为

$$A_{\text{auto}}(\tau, \theta) = A_{z_1}(\tau, \theta) + A_{z_2}(\tau, \theta)$$

$$A_{\text{cross}}(\tau, \theta) = 2\text{Re}[A_{z_1, z_2}(\tau, \theta)]$$

由于

$$\begin{aligned} A_{z_1}(\tau, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} z_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z_1^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\theta t} dt \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(\frac{\alpha}{4}\tau^2 + j\omega_1\tau\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\alpha t^2 + 2\left(\alpha t_1 + j\frac{\theta}{2}\right)t - \alpha t_1^2\right] dt \end{aligned} \quad (\text{题 7.13.1})$$

将积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right) \quad (\text{题 7.13.2})$$

代入式 (题 7.13.1), 即有

$$A_{z_1}(\tau, \theta) = \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{4}\tau^2 + \frac{1}{4\alpha}\theta^2\right)\right] \exp[j(\omega_1\tau - t_1\theta)]$$

类似地, 有

$$A_{z_2}(\tau, \theta) = \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{4}\tau^2 + \frac{1}{4\alpha}\theta^2\right)\right] \exp[j(\omega_2\tau - t_2\theta)]$$

故

$$A_{\text{auto}}(\tau, \theta) = \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{4}\tau^2 + \frac{1}{4\alpha}\theta^2\right)\right] \sum_{i=1}^2 \exp[j(\omega_i\tau - t_i\theta)]$$

关于互模糊函数, 我们有

$$\begin{aligned} A_{z_1, z_2}(\tau, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} z_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\theta t} dt \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\alpha}{2}\left(t + \frac{\tau}{2} - t_1\right)^2 + j\omega_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right] \times \\ &\quad \exp\left[-\frac{\alpha}{2}\left(t - \frac{\tau}{2} - t_2\right)^2 - j\omega_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] e^{j\theta t} dt \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\alpha t^2 + \left[\frac{\alpha}{2}(t_1 + t_2) + j\frac{1}{2}(\theta + \omega_1 - \omega_2)\right]t - \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha}{4}[(t - t_1 + t_2)^2 + (t_1 + t_2)^2] + j\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\tau\right\} dt \end{aligned}$$

因此, 在积分公式 (题 7.13.2) 中, 参数  $A, B, C$  分别为

$$\begin{aligned} A &= \alpha \\ B &= \frac{\alpha}{4}(t_1 + t_2) + j\frac{1}{2}(\theta + \omega_d) \\ C &= \frac{\alpha}{4}[(t - t_d)^2 + (t_1 + t_2)^2] + j\omega_m\tau \end{aligned}$$

由积分公式 (题 7.13.2) 知

$$A_{z_1, z_2}(\tau, \theta) = \exp\left[-\frac{1}{4\alpha}(\theta + \omega_d)^2 - \frac{\alpha}{4}(\tau - t_d)^2\right] \exp[j(\omega_m\tau + \theta t_m + \omega_d t_m)]$$

类似地, 互模糊函数

$$A_{z_1, z_2}(\tau, \theta) = \exp\left[-\frac{1}{4\alpha}(\theta - \omega_d)^2 - \frac{\alpha}{4}(\tau + t_d)^2\right] \exp[j(\omega_m\tau + \theta t_m + \omega_d t_m)]$$

所以交叉项

$$\begin{aligned} A_{\text{cross}}(\tau, \theta) &= \left\{ \exp\left[-\frac{1}{4\alpha}(\theta + \omega_d)^2 - \frac{\alpha}{4}(\tau - t_d)^2\right] + \right. \\ &\quad \left. \exp\left[-\frac{1}{4\alpha}(\theta - \omega_d)^2 - \frac{\alpha}{4}(\tau + t_d)^2\right] \right\} \exp[j(\omega_m\tau + \theta t_m + \omega_d t_m)] \end{aligned}$$

证毕.

**题 7.14** 由于  $\phi(\tau, \nu)$  是窗函数  $\gamma(t)$  的模糊函数, 故

$$\phi(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \gamma^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\nu t} dt$$

其 Fourier 变换为

$$\psi(t, \tau) = \gamma\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \gamma^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

将它代入 Cohen 类分布的定义式, 得

$$\begin{aligned} C_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \psi(t - u, \tau) e^{-j\omega\tau} du d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \gamma^*\left[t - \left(u + \frac{\tau}{2}\right)\right] \exp\left[-j\omega\left(u + \frac{\tau}{2}\right)\right] \times \\ &\quad z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \gamma\left[t - \left(u - \frac{\tau}{2}\right)\right] \exp\left[j\omega\left(u - \frac{\tau}{2}\right)\right] du d\tau \end{aligned}$$

作变量代换, 有

$$x = u + \frac{\tau}{2} \quad \text{和} \quad y = u - \frac{\tau}{2}$$

则

$$\begin{aligned} C_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \gamma^*(t-x) e^{-j\omega x} z^*(y) \gamma(t-y) e^{j\omega y} dx dy \\ &= \text{STFT}_z(t, \omega) \cdot \text{STFT}_z^*(t, \omega) \\ &= |\text{STFT}_z(t, \omega)|^2 \end{aligned}$$

即 Cohen 类时频分布等价于谱图。证毕。

**题 7.15** 由已知  $y(t)$  的形式, 易知双线性变换

$$\begin{aligned} & y\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma\left(t + \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \exp\left[j\omega_0\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \mu\left(t + \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \times \\ & \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2\right] \exp\left\{-j\left[\omega_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \mu\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2\right]\right\} \\ &= \exp\left[-\frac{\gamma}{4}\tau^2 + j(\omega_0 + 2\mu t)\tau - \gamma t^2\right] \end{aligned}$$

故  $y(t)$  的 Wigner-Ville 变换

$$\begin{aligned} W_y(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j\omega\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\gamma}{4}\tau^2 + j(\omega_0 - \omega + 2\mu t)\tau - \gamma t^2\right] d\tau \end{aligned} \quad (\text{题 7.15.1})$$

在积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$$

中, 令

$$\begin{aligned} A &= \frac{\gamma}{4} \\ B &= j\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega + 2\mu t) \\ C &= \gamma t^2 \end{aligned}$$

则式 (题 7.15.1) 给出积分结果如下:

$$W_y(t, \omega) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \exp\left[\gamma t^2 + \gamma^{-1}(\omega_0 - \omega + 2\mu t)^2\right] \quad (\text{题 7.15.2})$$

**答案:** 信号  $y(t) = e^{-0.5\gamma t^2} e^{j(\omega_0 t + \mu t^2)}$  的 Wigner-Ville 分布为

$$W_y(t, \omega) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \exp\left[\gamma t^2 + \gamma^{-1}(\omega_0 - \omega + 2\mu t)^2\right]$$

显然, 对于任何  $(t, \omega)$ , Wigner-Ville 分布  $W_y(t, \omega)$  都不可能为负值, 即在线性调频信号被高斯信号包络调制的情况下, 所得到的信号的 Wigner-Ville 分布是非负的。

**题 7.16** 直接计算, 得

$$\begin{aligned}
 & \text{SWD}_z(t, \omega) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\theta, \nu) W_z(t - \theta, \omega - \nu) d\theta d\nu \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\theta + \frac{\tau'}{2}\right) x^*\left(\theta - \frac{\tau'}{2}\right) e^{-j\nu\tau'} d\tau' \right] \times \\
 & \quad \left[ \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t - \theta + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \theta - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j(\omega - \nu)\tau} d\tau \right] d\theta d\nu \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\theta + \frac{\tau'}{2}\right) x^*\left(\theta - \frac{\tau'}{2}\right) z\left(\theta + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(\theta - \frac{\tau}{2}\right) \times \\
 & \quad \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\tau - \tau')\nu} d\nu \right) e^{-j\omega\tau} d\tau' d\tau d\theta \quad (\text{题 7.16.1})
 \end{aligned}$$

但是

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\tau - \tau')\nu} d\nu = \delta(\tau - \tau') = \begin{cases} 1, & \tau = \tau' \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{题 7.16.2})$$

将式 (题 7.16.2) 代入式 (题 7.16.1), 则有

$$\begin{aligned}
 & \text{SWD}_z(t, \omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\theta + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\theta - \frac{\tau}{2}\right) z\left(\theta + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(\theta - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau d\theta \\
 & \quad (\text{题 7.16.3})
 \end{aligned}$$

作变量代换

$$u = \theta + \frac{\tau}{2} \quad \text{和} \quad v = \theta - \frac{\tau}{2}$$

后, 式 (题 7.16.3) 变为

$$\begin{aligned}
 \text{SWD}_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) x^*(v) y(t - v) y^*(t - u) e^{-j\omega u} e^{-j\omega v} du dv \\
 &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y^*(t - u) e^{-j\omega u} du \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(v) y^*(t - v) e^{j\omega v} dv \right]^* \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y^*(t - u) e^{-j\omega u} du \right|^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

就是说, 当  $\Phi(t, \omega)$  取作某个信号  $x(t)$  的 Wigner-Ville 分布时, 平滑 Wigner-Ville 分布是非负的函数。证毕。

题 7.17<sup>[10]</sup> Fourier 变换

$$X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N x(n)e^{-j\omega n} \quad (\text{题 7.17.1})$$

可视为样本  $\{x(n)e^{-j\omega n}, n \in [1, N]\}$  的平均值。因此, Fourier 变换或频谱  $X(\omega)$  也可看作是代价函数

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^N |e(n)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N |x(n)e^{-j\omega n} - X(\omega)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N |x(n) - X(\omega)e^{j\omega n}|^2 \end{aligned} \quad (\text{题 7.17.2})$$

的最小化结果。式中  $e(n) = x(n)e^{-j\omega n} - X(\omega)$  为估计误差。式(题 7.17.2)说明, 当  $x(n) = s(n) + v(n)$  即信号  $s(n)$  被高斯白噪声  $v(n)$  污染时, 信号  $s(n)$  的标准 Fourier 变换可视为  $s(n)$  的最小二乘估计和最大似然估计(白噪声情况下, 这两种估计是等价的)。

由于短时 Fourier 变换实质上为加“短”窗函数的 Fourier 变换, 因此短时 Fourier 变换是优化问题

$$\text{STFT}(t, \omega) = \arg \min_m \sum_{n=1}^N |x(t + nT) - me^{j\omega nT}|^2 \quad (\text{题 7.17.3})$$

的解, 其中误差函数取

$$e(t, \omega, n) = x(t + nT) - me^{j\omega nT}$$

换言之, 短时 Fourier 变换可通过

$$\left. \frac{\partial J(t, \omega; m)}{\partial m^*} \right|_{m=\text{STFT}(t, \omega)} = 0 \quad (\text{题 7.17.4})$$

求出, 式中  $J(t, \omega, m) = \sum_{n=1}^N |e(t, \omega, n)|^2$ 。

式(题 7.17.4)的解为

$$\text{STFT}(t, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(t + nT)w_h(nT)e^{-j\omega nT} \quad (\text{题 7.17.5})$$

若定义代价函数

$$J(t, \omega, n) = \sum_{n=1}^N |e(t, \omega, n)| = \sum_{n=1}^N |x(t + nT) - me^{j\omega nT}|$$

则容易求出式 (题 7.17.4) 的解由下式给出:

$$\begin{aligned} \text{STFT}_R(t, \omega) &= \sum_{n=1}^N d(t, \omega, n)x(t + nT)e^{-j\omega nT} \\ d(t, \omega, n) &= \frac{\gamma(t, \omega, n)}{\sum_{n=1}^N \gamma(t, \omega, n)} \\ \gamma(t, \omega, n) &= w_h(nT)|e(t, \omega, n)|^{-1} \end{aligned}$$

证毕.

**题 7.18** <sup>[10]</sup> 与题 7.17 相类似, 定义误差函数

$$e(t, \omega, n) = 2x(t + nT)x^*(t - nT) - me^{j2\omega nT} \quad (\text{题 7.18.1})$$

式中  $m$  代表某种时频分布, 并取代价函数

$$\begin{aligned} J(t, \omega; m) &= \sum_{n=1}^N w_h(nT)|e(t, \omega, n)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N w_h|x(t + nT)x^*(t - nT) - me^{j2\omega nT}|^2 \end{aligned} \quad (\text{题 7.18.2})$$

则由

$$\left. \frac{\partial J(t, \omega; m)}{\partial m^*} \right|_{m=W(t, \omega)} = 0 \quad (\text{题 7.18.3})$$

得标准的 Wigner-Ville 分布为

$$W(t, \omega) = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N w_h(nT) x(t + nT)x^*(t - nT)e^{-j2\omega nT} \quad (\text{题 7.18.4})$$

现在, 将代价函数取作

$$\begin{aligned} J(t, \omega; m) &= \sum_{n=1}^N w_h(nT) |e(t, \omega, n)| \\ &= \sum_{n=1}^N w_h(nT) |x(t + nT)x^*(t - nT) - me^{j2\omega nT}| \end{aligned} \quad (\text{题 7.18.5})$$

则由式 (题 7.18.3) 得到新的 Wigner-Ville 分布如下:

$$W_R(t, \omega) = \frac{2}{\sum_{n=1}^N w_h(nT) / |e(t, \omega, n)|} \sum_{n=1}^N \frac{w_h(nT)}{|e(t, \omega, n)|} x(t + nT)x^*(t - nT)e^{-j2\omega nT} \quad (\text{题 7.18.6})$$

它被称为鲁棒 Wigner-Ville 分布<sup>[10]</sup>。



## 参 考 文 献

- [1] Auger F, Flandrin P. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 1068~1089
- [2] Barkat B, Boashash B. A high-resolution quadratic time-frequency distribution for multicomponent signals analysis. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 2232~2239
- [3] Bilinskis I, Mikelsons A. *Randomized Signal Processing*. New York: Prentice Hall, 1992
- [4] Chandran V, Elgar S L. Pattern recognition using invariants defined from higher-order spectra: One-dimensional inputs. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, 41: 205~212
- [5] Choi H, Williams W J. Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1989, 37: 862~871
- [6] Classen T A C M, Mechlenbrauker. The Wigner distribution: A tool for time-frequency signal analysis. *Phillips J. Res.*, 1980, 35: 217~250, 276~300, 1067~1072
- [7] Cohen L. *Time-Frequency Analysis*, Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1995
- [8] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1988, XLI: 909~996
- [9] Delopoulos A N, Giannakis G B. Strongly consistent identification algorithm and noise insensitive MSE criteria. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1992, 40: 1955~1970
- [10] Djurovic I, Stankovic L. Robust Wigner distribution with application to the instantaneous frequency estimation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 2985~2993
- [11] Duda R O, Hart P E. *Pattern Classification and Scene Analysis*. New York: Wiley, 1973
- [12] Ferrara E R. A method for cancelling interference from a constant envelope signal. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1985, 33: 316~319
- [13] Fonollosa J R, Nikias C L. Wigner-Ville higher-order moment spectra: Definition, properties, computation and application to transient signal analysis. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, 41: 245~266
- [14] Friedlander B, Porat B. Adaptive IIR algorithms based on higher-order statistics. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1989, 37: 485~495

- [15] Giannakis G B, Mendel J M. Identification of nonminimum phase systems using higher-order statistics. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1989, 37: 360~377
- [16] Haykin S. *Adaptive Filter Theory*, 3rd Edit. Prentice Hall, 1996
- [17] Janssen A J E M. Gabor representation of generalized functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 1981, 83: 377~394
- [18] Jawerth B, Sweldens W. An overview of wavelet based multiresolution analysis. *SIAM Rev.*, 1994, 36: 377~412
- [19] Jeong J, Williams W J. Kernel design for reduced interference distributions. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1992, 40: 402~412
- [20] Kumaresan R. Estimating the parameters of exponentially damped or undamped sinusoidal signals in noise. Ph.D. dissertation, University of Rhode Island, RI, 1982
- [21] Kumaresan R, Tufts D W. Estimating the angles of arrival of multiple plane waves. *IEEE Trans. Aerospace and Electronics Systems*, 1983, 19: 134~139
- [22] Lawrence R E, Kaufman H. The Kalman filter for the equalization of a digital communication channel. *IEEE Trans. Commun.*, 1971, 19: 1137~1141
- [23] Lewis F L. *Optimal Estimation*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1986
- [24] Liao X, Bao Z. Circularly integrated bispectra: Novel shift invariant features for high-resolution radar target recognition. *Electron. Letters*, 1998, 34: 1879~1880
- [25] Lii K S, Rosenblatt M R. Estimation and deconvolution when the transfer function has zeros. *J. Theoretical Probability*, 1988, 1(1): 93~113
- [26] Mallat S G. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 1989, 11: 674~693
- [27] Mertins A. *Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1999
- [28] Mohanty N. *Random Signals Estimation and Identification*. New York: Van Nostrand Reinhold Comp., 1986
- [29] Nikias C L, Pan R. Time delay estimation in unknown Gaussian spatially correlated noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1988, 36: 1706~1714
- [30] Nikias C L, Liu F. Bicepstrum computation based on second- and third-order statistics with applications. *Proc. ICASSP'90*, 2381~2386
- [31] Nikias C L, Petropulu A P. *Higher-Order Spectra Analysis*. New York: Prentice Hall, 1993
- [32] Porat B. *Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods*. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1994

- [33] Poularikas A D. The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing. CRC Press, Springer, IEEE Press, 1998
- [34] Qian S, Chen D. Signal representation using adaptive normalized Gaussian functions. *Signal Processing*, 1994, 36: 1~11
- [35] Roy R, Kailath T. ESPRIT: Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1989, 37: 297~301
- [36] Sasaki K, Sato T, Makamura Y. Holographic passive sonar. *IEEE Trans. Sonics Ultrason*, 1977, 24: 193~200
- [37] Sato T, Sasaki K. Bispectral holography. *J. Acoust., Soc. Amer.*, 1977, 62: 404~408
- [38] Shi Y, Zhang X D. Gabor atom network for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 2994~3004
- [39] Stoica P, Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1989, 37: 720~741
- [40] Swami A, Mendel J M. Cumulant-based approach to the harmonic retrieval and related problems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1991, 39: 1099~1109
- [41] Therrien C W. Discrete Random Signal and Statistical Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992
- [42] Tsatsanis M K, Z Xu. Performance analysis of minimum variance CDMA receivers. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1998, 46: 3014~3022
- [43] Tugnait J K. Approaches to FIR system identification with noisy data using higher order statistics. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1307~1317
- [44] Tugnait J K. On time delay estimation with unknown spatially correlated Gaussian noise using fourth-order cumulants and cross cumulants. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1991, 39: 1258~1267
- [45] Tugnait J K. Time delay estimation with unknown spatially correlated Gaussian noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, 41: 549~558
- [46] Tugnait J K. Detection of non-Gaussian signals using integrated polyspectrum. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1994, 42: 3137~3149
- [47] Wexler J, Raz S. Discrete Gabor expansions. *Signal Processing*, 1990, 21: 207~220
- [48] Zhang X D, Zhang Y S. Singular value decomposition-based MA order determination of non-Gaussian ARMA models. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, 41: 2657~2664
- [49] Zhang X D, Zhang Y S. FIR system identification using higher order cumulants. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1994, 42: 2854~2858
- [50] Zhang X D, Liang Y C, Li Y D. A hybrid approach to harmonic retrieval in non-Gaussian noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1994, 42: 1220~1226

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002

- [51] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian ARMA noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43: 349 ~ 353
- [52] Zhang X D, Shi Y, Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2001, 49: 1875 ~ 1885
- [53] Zhang X D, Wei W. Blind adaptive multiuser detection based on Kalman filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50: 87 ~ 95
- [54] Zhao Y, Atlas L E, Marks R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1084 ~ 1091
- [55] 张贤达. 现代信号处理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002